E1 (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} x-y+az=0 \\ x-z=0 \\ 2x+ay-2z=0 \end{array}\right.$

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a. (1,2 puntos)

Recurriremos al teorema de Rouché–Frobenius para discutir el número de soluciones de este sistema. Para ello, comenzamos por definir la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes:

$$\text{Matriz de los coeficientes} \longrightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada} \longrightarrow M^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & a & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación, evaluamos el rango de M, en función de los valores de a para los cuales $|M|=0$:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix}=2+a^2+a-2=a^2+a=a\cdot(a+1)$$

$$\text{Si } |M|=0 \longrightarrow a\cdot(a+1)=0 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right.$$

En consecuencia, si $a\neq 0$ y $a\neq -1$, el rango de M es 3, pues en este caso $|M|\neq 0$. Si $a=0$ o $a=-1$, el rango de M no puede ser 3, por ser $|M|=0$ para estos valores de a, y sería 2, ya que siempre existe al menos un determinante de orden 2 no nulo en ella:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

Por tanto:

- Si $a\neq 0$ y $a\neq -1$, $ran(M)=ran(M^*)=3$, que coincide con el número n de incógnitas:

  $$\boxed{\text{Si } a\neq 0 \text{ y } a\neq -1 \longrightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO}}$$

  Por tratarse de un sistema homogéneo, obtendríamos la solución trivial $(0,0,0)$.

- Si $a=0$ o $a=-1$, $ran(M)=ran(M^*)=2$, ya que los términos independientes son todos nulos y, por ello, la matriz ampliada M^* no puede tener un rango mayor que el de la matriz M:

  $$\boxed{\text{Si } a=0 \text{ y } a=-1 \longrightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}}$$

Enrique Castaños
cienciaonthecrest@gmail.com

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$. (0,8 puntos)

Para $a = -1$, el sistema quedaría:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

En este caso el sistema es compatible indeterminado, con un grado de libertad (los rangos son 2 y el número de incógnitas es 3). Debemos parametrizar una de las incógnitas, por ejemplo:

$$\boxed{z = \lambda}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - z = 0 \longrightarrow x - \lambda = 0 \longrightarrow \boxed{x = \lambda}$$

Llevando estos resultados a la primera ecuación obtenemos:

$$x - y - z = 0 \longrightarrow \lambda - y - \lambda = 0 \longrightarrow \boxed{y = 0}$$

El mismo resultado obtendríamos con la tercera ecuación:

$$2x - y - 2z = 0 \longrightarrow 2\lambda - y - 2\lambda = 0 \longrightarrow y = 0$$

E2 (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$.

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}. (0,5 puntos)

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada, A, tenga inversa, A^{-1}, es que su determinante, $|A|$, no sea nulo. En consecuencia, averiguaremos los valores de a que anulan $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot a = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

Por tanto, se cumplirá que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a = 0 \text{ y } a = 3 \longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists\, A^{-1} \\ \text{Si } a \neq 0 \text{ y } a \neq 3 \longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1} \end{array}}$$

b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz X que verifica que $B + X \cdot A = C$. (1,5 puntos)

Despejamos X en la ecuación matricial:

$$B + X \cdot A = C \longrightarrow X \cdot A = C - B \longrightarrow \underbrace{X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I}}_{X} = (C - B) \cdot A^{-1}$$

$$\boxed{X = (C - B) \cdot A^{-1}}$$

Enrique Castaños
cienciaonthecrest@gmail.com

Por un lado, calculamos $C - B$:

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro, calculamos A^{-1}, para $a = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |A| = 4, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A^t) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, X será:

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 - 1/4 & 1/4 + 5/4 \\ -1/4 - 1/4 & 1/4 + 5/4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

E3 (Geometría)

Sean el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 3, -1)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π. (2 puntos)

Llamaremos π' al plano que hay que determinar.

Si la recta r es paralela al plano π', el vector director de r lo será también del plano π'. A este vector lo llamaremos $\vec{v}_1$ y se deduce fácilmente si expresamos la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \vec{v}_1 = (1, 1, 0)$$

Además, como los planos π y π' son perpendiculares, el vector normal al plano π será un vector director de π'. Este vector, que llamaremos $\vec{v}_2$, lo obtenemos automáticamente de la ecuación del plano π:

$$\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0 \Longrightarrow \vec{v}_2 = (1, -2, 2)$$

Luego el plano que contiene a los vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (1, -2, 2)$ y al punto $A = (1, 3, -1)$ es:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \pi' \equiv 2 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-3) - 3 \cdot (z+1) = 0$$

$$\boxed{\pi' \equiv 2x - 2y - 3z + 1 = 0}$$

E4 (Geometría)

Dados el punto $A(1,2,4)$ y la recta

$$\boldsymbol{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}}$$

a) Hallar el punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv x+2z=0$. (1,5 puntos)

El punto B desconocido será (x,y,z).Sabemos que B pertenece a la recta r, que expresamos en forma paramétrica:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2} \longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$

De esta manera, el punto $B=(x,y,z)$ puede escribirse en función de λ:

$$B(1+2\lambda, 1+\lambda, 1+2\lambda)$$

Por lo que el vector $\overrightarrow{AB}$ vendrá dado por:

$$\overrightarrow{AB} = (1+2\lambda, 1+\lambda, 1+2\lambda) - (1,2,4) = (2\lambda, -1+\lambda, -3+2\lambda)$$

Si $\overrightarrow{AB}$ es paralelo al plano π, será perpendicular al vector $\vec{n}_\pi$ normal al plano:

$$\pi \equiv x+2z=0 \Longrightarrow \vec{n}_\pi = (1,0,2)$$

Por lo que se cumplirá que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

Es decir:

$$(2\lambda, -1+\lambda, -3+2\lambda)\cdot(1,0,2) = 2\lambda - 6 + 4\lambda = 6\lambda - 6 = 0 \longrightarrow \lambda = 1$$

Siendo $\lambda = 1$, el punto B buscado será:

$$\boxed{B = (3,2,3)}$$

b) Hallar un vector (a,b,c) perpendicular a $(1,0,-1)$ y $(2,1,0)$. (0,5 puntos)

Para calcular un vector perpendicular a $(1,0,-1)$ y $(2,1,0)$ hacemos el producto vectorial de estos dos vectores:

$$(1,0,-1)\times(2,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k} \longrightarrow \boxed{(a,b,c) = (1,-2,1)}$$

También cumpliría los requisitos de perpendicularidad el vector $(-1,2,-1)$, o cualquier otro vector que sea proporcional.

E5 (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = x \cdot e^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas. (2 puntos)

El dominio de esta función es $\mathbb{R}$ por lo que <u>no tiene asíntotas verticales</u>.

Para saber si tiene asíntotas horizontales, comprobamos los límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$:

$$\underbrace{\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x}_{[\infty \cdot 0]} = \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}}_{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} \xrightarrow{\text{L´Hôpital}} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \longrightarrow \boxed{\text{Asíntota horizontal } y = 0 \text{ cuando } x \longrightarrow -\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^x = +\infty \longrightarrow \boxed{\text{No aparece asíntota horizontal cuando } x \longrightarrow +\infty}$$

Como no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$, puede existir una asíntota oblicua $y = mx + n$. Si es así, debemos obtener un valor finito para m, resolviendo el límite:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \longrightarrow \boxed{\text{No exite asíntota oblicua}}$$

A continuación, evaluamos la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x)$$

Calculamos los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$:

$$e^x \cdot (1 + x) \longrightarrow \begin{cases} e^x = 0 \longrightarrow \text{No es posible} \\ 1 + x = 0 \longrightarrow x = -1 \end{cases}$$

Analizamos el signo de $f'(x)$ antes y después de $x = -1$, el único valor para el cual la primera derivada se anula, lo que nos permitirá conocer la monotonía de la función:

$$\text{Si } x < -1 \longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow \boxed{f(x) \text{ es decreciente en } (-\infty, -1)}$$

$$\text{Si } x > -1 \longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow \boxed{f(x) \text{ es creciente en } (-1, +\infty)}$$

Según esto, para el valor de abscisa $x = -1$ la gráfica presenta un mínimo. La ordenada en este punto es $f(-1) = -e^{-}$. Es decir:

$$\boxed{\text{Mínimo} \longrightarrow \left(-1, -\frac{1}{e}\right)}$$

Para estudiar la curvatura recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = e^x \cdot (1 + x) + e^x = e^x + x \cdot e^x + e^x = e^x \cdot (2 + x)$$

Calculamos los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$:

$$e^x \cdot (2 + x) \longrightarrow \begin{cases} e^x = 0 \longrightarrow \text{No es posible} \\ 2 + x = 0 \longrightarrow x = -2 \end{cases}$$

Enrique Castaños
cienciaonthecrest@gmail.com

Cuando $x = -2$ (el único valor para el cual la segunda derivada se anula) aparece un punto de inflexión. Por lo que la curvatura antes y después de este punto dependerá del signo que tenga la segunda derivada en estos intervalos:

$$\text{Si } x < -2 \longrightarrow f''(x) < 0 \Longrightarrow \boxed{f(x) \text{ es cóncava (forma } \cap \text{) en } (-\infty, -2)}$$

$$\text{Si } x > -2 \longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow \boxed{f(x) \text{ es convexa (forma } \cup \text{) en } (-2, +\infty)}$$

Aunque no se nos pida expresamente, es conveniente calcular las coordenadas del punto de inflexión para hacer un mejor esbozo de la gráfica:

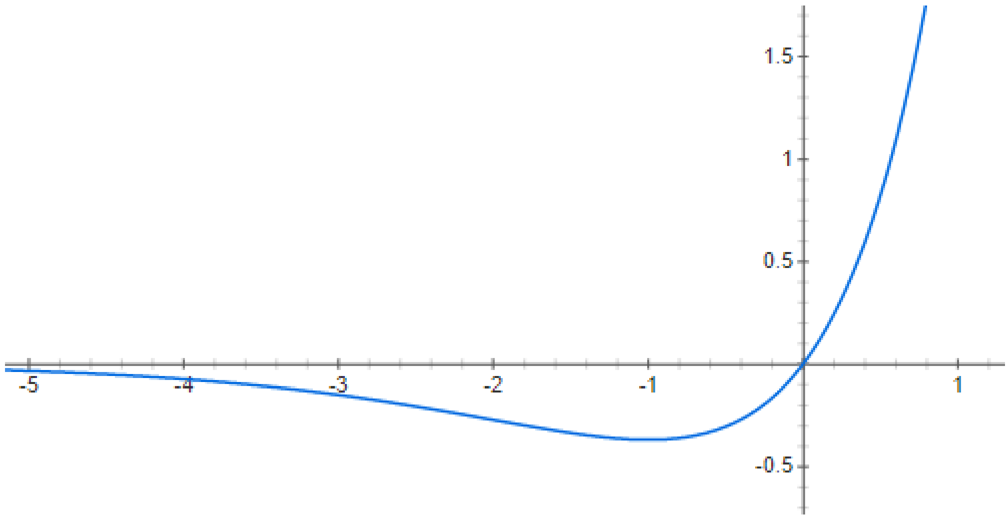
$$x = -2 \longrightarrow f(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \Longrightarrow \boxed{\text{Punto inflexión en } \left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)}$$

Y también sería recomendable calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje } X \longrightarrow f(x) = x \cdot e^x = 0 \longrightarrow x = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{Punto } (0,0)}$$

$$\text{Eje } Y \longrightarrow f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{Punto } (0,0)}$$

Con toda esta información, es posible realizar una gráfica similar a esta:



E6 (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$ y pruebe además que esta solución es única. (2 puntos)

La ecuación $x^3 - 12x = -2$ puede escribirse también así:

$$x^3 - 12x + 2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación coincidirán con los ceros de la función:

$$f(x) = x^3 - 12x + 2$$

Es decir, las soluciones de la ecuación son los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas.

Según el teorema de Bolzano:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Si } f(x) \text{ es continua en } [a,b] \\ \text{y signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)\end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \;/\; f(c) = 0$$

Como $f(x)$ es una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$, luego es continua en el intervalo $[-2,2]$ que se propone. Y siendo:

$$f(-2) = (-2)^3 - 12\cdot(-2) + 2 = -8 + 24 + 2 = 18 > 0$$

$$f(2) = 2^3 - 12\cdot 2 + 2 = 8 - 24 + 2 = -14 < 0$$

Entonces:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}f(x) \text{ es continua en } [-2,2] \\ \text{signo } f(-2) \neq \text{signo } f(2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in (-2,2) \;/\; f(c) = 0}$$

Es decir, <u>existe al menos un valor c entre -2 y 2 para el cual la función se anula y que es, en consecuencia, una solución de la ecuación</u>.

Supongamos que, además de c, existe otra solución s, de manera que $s > c$. Entonces, por el teorema de Rolle, se cumplirá que:

$$\left\{\begin{array}{l}f(x) \text{ es continua en } [c,s] \\ f(x) \text{ es derivable en } (c,s) \\ \qquad f(c) = f(s)\end{array}\right. \Longrightarrow \exists\, k_1 \in (c,s) \;/\; f'(k_1) = 0$$

Análogamente, si suponemos que es una solución t, tal que $t < c$:

$$\left\{\begin{array}{l}f(x) \text{ es continua en } [t,c] \\ f(x) \text{ es derivable en } (t,c) \\ \qquad f(t) = f(c)\end{array}\right. \Longrightarrow \exists\, k_2 \in (t,c) \;/\; f'(k_2) = 0$$

Comprobamos si existe algún valor k para el cual se anule $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \longrightarrow 3k^2 - 12 = 0 \longrightarrow 3k^2 = 12 \longrightarrow k^2 = 4 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}k_1 = +2 \\ k_2 = -2\end{array}\right.$$

Esto significa que sí se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, y con ello probamos que <u>hay otros dos valores, s y t, para los cuales la función se anula y que, por tanto, son soluciones de la ecuación</u>:

- Como $k_1 = +2$, y sabemos que $k_1 \in (c,s)$, entonces $s > +2$.
- Como $k_2 = -2$, y sabemos que $k_2 \in (t,c)$, entonces $t < -2$.

En resumen:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Hay una solución } c \text{ en el intervalo } (-2,2) \\ \text{Hay una solucion } s > +2 \text{ y una solución } t < -2\end{array}}$$

Luego hemos demostrado que <u>no hay una única solución, pero solo una está entre -2 y $+2$</u>.

Enrique Castaños
cienciaonthecrest@gmail.com

E7 (Análisis)

a) Calcular: (1 punto)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{e^x-\cos x-x}}{\boldsymbol{e^x+\operatorname{sen} x-1}}=\frac{1-1-0}{1+0-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{\text{L´Hôpital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen} x-1}{e^x+\cos x}=\frac{1+0-1}{1+1}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

b) Calcular: (1 punto)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boldsymbol{\operatorname{sen} x+\cos x})\cdot \boldsymbol{dx}=[-\cos x+\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underbrace{\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)}_{-0+1}-\underbrace{(-\cos 0+\operatorname{sen} 0)}_{-1+0}=\boxed{2}$$

E8 (Análisis)

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x)=2/x$ y $g(x)=3-x$. (0,5 puntos)

Igualamos las expresiones de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y resolvemos la ecuación que se obtiene:

$$\frac{2}{x}=3-x\longrightarrow 2=3x-x^2\longrightarrow x^2-3x+2=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\longrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$$

Cuando $x_1=1\longrightarrow f(1)=g(1)=2$ y cuando $x_2=2\longrightarrow f(2)=g(2)=1$. Por tanto:

$$\boxed{\text{Puntos de corte}\longrightarrow(1,2)\ y\ (2,1)}$$

b) Sabiendo que en el intervalo $[1,2]$ se verifica que $g(x)\geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo. (1,5 puntos)

Como $g(x)>f(x)$ si $x\in[1,2]$, entonces el área pedida vendrá dada por:

$$A=\int_1^2[g(x)-f(x)]\cdot dx=\int_1^2\left[3-x-\frac{2}{x}\right]\cdot dx=\left[3x-\frac{x^2}{2}-2\ln x\right]_1^2=$$

$$=(6-2-2\ln 2)-\left(3-\frac{1}{2}-2\ln 1\right)=4-2\ln 2-\frac{5}{2}=\boxed{\frac{3}{2}-2\ln 2\ \ \mathrm{u}^2}$$

E9 (Probabilidad y estadística)

El peso de los alumnos de 2º de Bachillerato de un instituto de León sigue una distribución normal de media 75 kg y desviación típica 5 kg. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg. (1 punto)

El peso de los alumnos de ese curso es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu=75$ kg y desviación típica $\sigma=5$ kg: $X\sim N(75,5)$.

Enrique Castaños
cienciaonthecrest@gmail.com

Se nos pide la probabilidad $P(70 < X < 80)$. Tipificando la variable:

$$P(70 < X < 80) = P\left(\frac{70-75}{5} < Z < \frac{80-75}{5}\right) = P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) =$$

$$= P(Z < 1) - P(Z > 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] = 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = \boxed{0{,}6826}$$

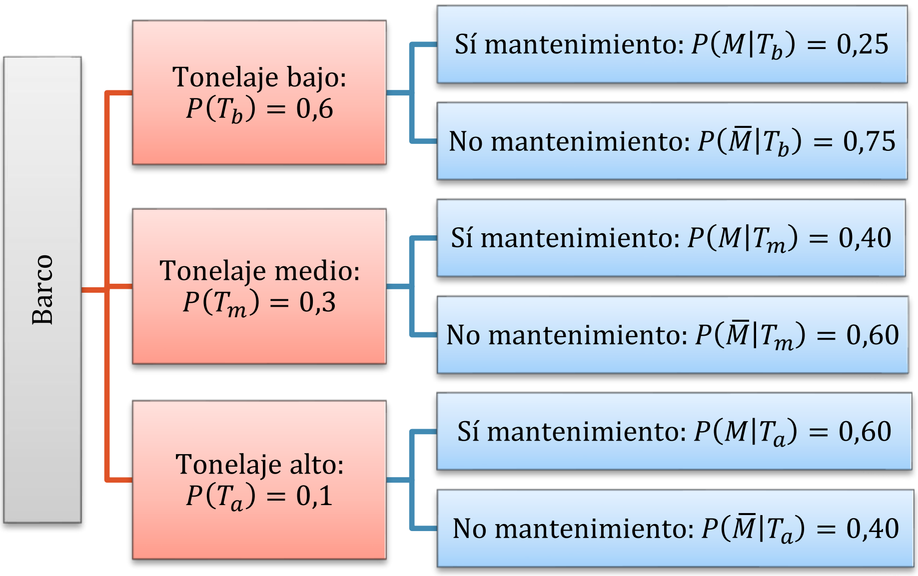
b) Tenga un peso superior a 85 kg. (1 punto)

En este caso se pide $P(X > 85)$. Tipificando:

$$P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85-75}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = \boxed{0{,}0228}$$

E10 (Probabilidad y estadística)

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6; 0,3 y 0,1; respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje; 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.



a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento. (1 punto)

$$P(M) = P(T_b) \cdot P(M|T_b) + P(T_m) \cdot P(M|T_m) + P(T_a) \cdot P(M|T_a) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}6$$

$$\boxed{P(M) = 0{,}33}$$

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio. (1 punto)

Se trata de una probabilidad condicionada (regla de Bayes):

$$P(T_m|M) = \frac{P(T_m \cap M)}{P(M)} = \frac{P(T_m) \cdot P(M|T_m)}{P(M)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}33}$$

$$\boxed{P(T_m|M) = 0{,}364}$$