CONSTANTES FÍSICAS	
Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre	$g = 9'80\ \mathrm{m/s^2}$
Carga elemental	$e = 1'60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Constante de gravitación universal	$G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
Constante de Planck	$h = 6'63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
Constante eléctrica en el vacío	$K = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9'00 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$
Electronvoltio	$1\ \mathrm{eV} = 1'60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$
Masa de la Tierra	$M_T = 5'98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9'11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$
Radio de la Tierra	$R_T = 6'37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$
Unidad de masa atómica	$1\ \mathrm{u} = 1'66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3'00 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$

Opción A

Ejercicio A1

a) ¿Qué es un campo gravitatorio? Explique algún método (o dispositivo) que permita la medición de su intensidad. (0′75 puntos)

Un campo físico es una región del espacio perturbada por la presencia de algún cuerpo o partícula (o un conjunto de ellas), que posee una cierta propiedad, y que se manifiesta al situar en algún punto del campo otro cuerpo (testigo) que tiene la misma propiedad. La noción de campo fue introducida para explicar las interacciones que actúan a distancia, como la electromagnética o la gravitatoria. En el caso de un campo de tipo gravitatorio, es la presencia de masa la causa de la perturbación que se crea en el espacio y que ejerce un efecto sobre cualquier otra masa que situemos en él. El campo gravitatorio se puede definir mediante una magnitud vectorial, llamada intensidad de campo gravitatorio, que toma valores distintos en cada punto del espacio, y que viene dada por la fuerza (gravitatoria) que actuaría sobre la unidad de masa testigo colocada en dicho punto:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Para un cuerpo esférico, como lo es la Tierra, la intensidad de campo gravitatorio en un punto exterior se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$$

Sustituyendo $r = R_T$ (radio medio de la Tierra), obtendríamos la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre: $g_0 = 9'8\ \mathrm{N/kg}$ (o $\mathrm{m/s^2}$). Este valor no es otra cosa que la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, que podemos considerar uniforme en zonas próximas a ella.

Una manera de estimar g consiste en utilizar un péndulo simple, ya que su periodo, T, se relaciona con su longitud, ℓ, mediante la expresión (para amplitudes pequeñas):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Como péndulo simple puede emplearse una esferita metálica colgada de un hilo, de longitud conocida. Midiendo el tiempo que tarda en realizar un determinado número de oscilaciones, se podrá obtener el valor promedio del periodo del péndulo y, con este dato, calcular la aceleración de la gravedad.

b) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se debe encontrar un cuerpo para que su peso sea un 5 % menor del que posee en la superficie? (0'75 puntos)

El peso de un cuerpo de masa m viene dado por la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre él (ley de gravitación universal de Newton):

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Siendo r la distancia a la que se encuentra el cuerpo del centro de la Tierra. Así pues, en la superficie terrestre, el peso es:

$$P = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Y a una altura h, el peso es:

$$P' = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}$$

Siendo $P' = 0'95 \cdot P$:

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = 0'95 \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Simplificando y operando:

$$\frac{1}{(R_T + h)^2} = \frac{0'95}{R_T^2} \longrightarrow R_T^2 = 0'95 \cdot (R_T + h)^2 \longrightarrow R_T = \sqrt{0'95} \cdot (R_T + h) \longrightarrow$$

$$R_T = \sqrt{0'95} \cdot R_T + \sqrt{0'95} \cdot h \longrightarrow h = \frac{1 - \sqrt{0'95}}{\sqrt{0'95}} \cdot R_T$$

Sustituyendo $R_T = 6'37 \cdot 10^6$ m:

$$h = \frac{1 - \sqrt{0'95}}{\sqrt{0'95}} \cdot (6'37 \cdot 10^6 \text{ m}) \longrightarrow \boxed{h = 1'65 \cdot 10^5 \text{ m}}$$

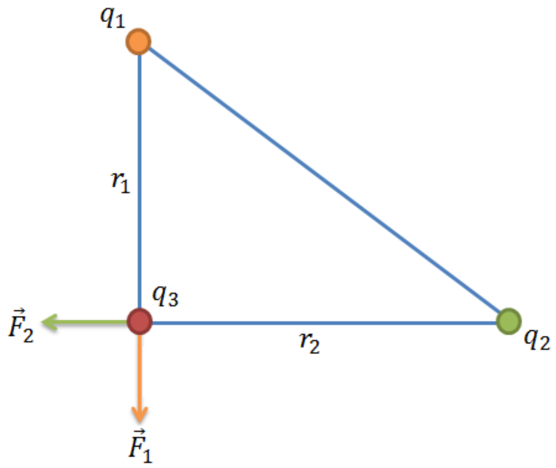
Puede comprobarse que, efectivamente, a esta altura g es un 5 % menor que g_0:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = (6'67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \cdot \frac{(5'98 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{(6'37 \cdot 10^6 \text{ m} + 1'65 \cdot 10^5 \text{ m})^2} = 9'3\ \text{m/s}^2$$

Ejercicio A2

Tres cargas iguales, de 2 μC cada una, están situadas en los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm.

a) Calcule el módulo de la fuerza que, sobre la carga situada en el vértice del ángulo recto, ejercen las otras dos cargas. Realice un diagrama ilustrativo. (1′5 puntos)



Entre cargas iguales se ejercen fuerzas de repulsión electrostática, regidas por la ley de Coulomb. Así, la carga q_1 ejerce una fuerza $\vec{F}_1$ sobre q_3 en la dirección $-y$ y la carga q_2 ejerce una fuerza $\vec{F}_2$ sobre q_3 en la dirección $-x$. En virtud del principio de superposición, la fuerza resultante sobre la carga q_3 es la suma vectorial de estas dos fuerzas. Siendo $q_1 = q_2 = q_3 = q = 2 \cdot 10^{-6}$ C:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = K \cdot \frac{q^2}{r_1^2} \cdot (-\vec{j}) + K \cdot \frac{q^2}{r_2^2} \cdot (-\vec{i})$$

$$= -(9'00 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-6} \text{ C})^2}{(0'06 \text{ m})^2} \cdot \vec{i} - (9'00 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-6} \text{ C})^2}{(0'08 \text{ m})^2} \cdot \vec{j}$$

$$= -5'625 \cdot \vec{i} - 10 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Cuyo módulo es:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(-5'625)^2 + (-10)^2} \longrightarrow \boxed{|\vec{F}| = 11'47 \text{ N}}$$

b) Determine el trabajo para transportar la carga situada en el vértice del ángulo recto desde su posición hasta el punto medio del segmento que une las otras dos. (1′5 puntos)

Las cargas q_1 y q_2 tienden a alejar la carga q_3, por lo que si lo que queremos es trasladarla al punto medio del segmento que une las cargas q_1 y q_2 debemos realizar un trabajo externo, que será igual a la variación de energía potencial:

$$W_{ext} = \Delta E_p = E_p(\text{final}) - E_p(\text{inicial})$$

La energía potencial del sistema en cada una de las situaciones se obtiene al sumar las interacciones entre cada par de cargas. En la situación inicial:

$$E_p(\text{inicial}) = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_1} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_2} = K \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

En la situación final:

$$E_p(\text{final}) = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_1'} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_2'} = K \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'}\right)$$

Las distancias r_1' y r_2' son iguales, pues la carga q_3 se sitúa en el punto medio del segmento que une las cargas q_1 y q_2, siendo la distancia entre q_1 y q_2 la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que forman las cargas en la disposición inicial:

$$r_{12} = \sqrt{(0'06)^2 + (0'08)^2} = 0'1 \text{ m}$$

$$r_1' = r_2' = \frac{r_{12}}{2} = \frac{0'1}{2} = 0'05 \text{ m}$$

Por tanto:

$$W_{ext} = K \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'}\right) - K \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = K \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$
$$= (9'00 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot (2 \cdot 10^{-6} \text{ C})^2 \cdot \left(\frac{1}{0'05 \text{ m}} + \frac{1}{0'05 \text{ m}} - \frac{1}{0'06 \text{ m}} - \frac{1}{0'08 \text{ m}}\right)$$

$$\boxed{W_{ext} = 0'39 \text{ J}}$$

Ejercicio A3

Una onda armónica viaja a lo largo de una cuerda y se observa que el oscilador que genera la onda produce 40 vibraciones de amplitud 30 cm en 30 segundos. También se observa que un máximo de la onda viaja 425 cm a lo largo de la cuerda en 10 segundos.

a) Establezca la ecuación de dicha onda. (1 punto)

La ecuación general de una onda armónica que se propaga en la dirección $+x$ es:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$$

En nuestro caso, se trata de una onda de 30 cm de amplitud, por lo que $A = 0'3$ m.

También sabemos que el oscilador que genera la onda produce 40 vibraciones en 30 segundos, por lo que su frecuencia es:

$$f = \frac{40}{30 \text{ s}} = \frac{4}{3} \text{ s}^{-1} \text{ (Hz)}$$

De donde se deduce la frecuencia angular de la onda:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = (2\pi \text{ rad}) \cdot \left(\frac{4}{3} \text{ s}^{-1}\right) = \frac{8\pi}{3} \text{ rad/s}$$

Sabiendo que la onda viaja 425 cm en 10 segundos, podemos calcular su velocidad de propagación:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{4'25 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 0'425 \text{ m/s}$$

Con este dato podemos conocer la longitud de onda λ y, a partir de esta, el número de ondas k:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \longrightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{0'425\ \text{m/s}}{4/3\ \text{s}^{-1}} = \frac{51}{160}\ \text{m} \approx 0'319\ \text{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{51/160\ \text{m}} = \frac{320\pi}{51}\ \text{m}^{-1} \approx 19'71\ \text{m}^{-1}$$

Sustituyendo A, ω y k en la ecuación de onda:

$$\boxed{y(x,t) = 0'3 \cdot \text{sen}\left(\frac{320\pi}{51} \cdot x - \frac{8\pi}{3} \cdot t\right)\ \ (\text{en m})}$$

b) ¿Cuál es la diferencia de fase en el estado de vibración de dos puntos de la cuerda separados 20 cm entre sí? (0'5 puntos)

La diferencia de fase entre dos puntos:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{320\pi}{51} \cdot x_2 - \frac{8\pi}{3} \cdot t\right) - \left(\frac{320\pi}{51} \cdot x_1 - \frac{8\pi}{3} \cdot t\right) = \frac{320\pi}{51} \cdot x_2 - \frac{320\pi}{51} \cdot x_1$$
$$= \frac{320\pi}{51} \cdot (x_2 - x_1) \longrightarrow \Delta\varphi = \frac{320\pi}{51} \cdot \Delta x$$

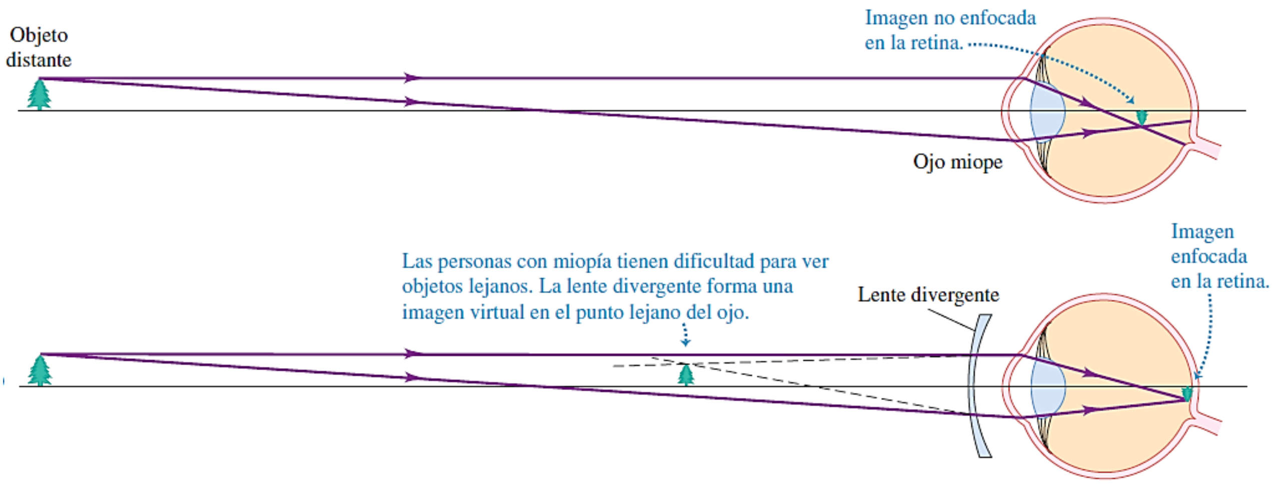
Siendo la separación entre los dos puntos $\Delta x = 20\ \text{cm} = 0'2\ \text{m}$:

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{64\pi}{51}\ \text{rad} \approx 3'94\ \text{rad}}$$

Ejercicio A4

a) ¿En qué consiste la miopía? ¿Cómo se corrige? (1 punto)

La miopía es un defecto de la visión debido a una deformación por alargamiento del globo ocular. En el ojo miope, los rayos provenientes de un objeto situado en el infinito se enfocan delante de la retina. El objeto más distante del cual se puede formar una imagen en la retina está entonces más próximo que el infinito. La consecuencia de esto es una visión borrosa de los objetos alejados. Este defecto puede corregirse mediante el uso de lentes divergentes:



b) Una fibra óptica está formada por un núcleo de un material de índice $n_1 = 1'52$ y un revestimiento de índice $n_2 = 1'46$. Determine el valor máximo del ángulo θ con el que tiene que incidir la luz para quedar atrapada dentro de la fibra. (1 punto)

Para que la luz quede atrapada dentro de la fibra, el ángulo con el que incide la luz en la superficie que separa el núcleo y el revestimiento ha de ser mayor al ángulo crítico o ángulo límite, para el cual ya no se produce refracción, sino una reflexión total interna de la luz. Este ángulo puede calcularse a partir de la ley de Snel, para un ángulo de refracción de 90°:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \longrightarrow n_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_L = n_2 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}90°}_{1} \longrightarrow \theta_L = \operatorname{arc\,sen}\frac{n_2}{n_1}$$

Siendo $n_1 = 1'52$ y $n_2 = 1'46$:

$$\theta_L = \operatorname{arc\,sen}\frac{1'46}{1'52} = 73'85°$$

Si el ángulo de incidencia entre el núcleo y el revestimiento tiene que ser mayor que θ_L, el rayo tiene que entrar en la fibra formando, como máximo, un ángulo θ tal que al refractarse en el interior del núcleo lo haga con un ángulo, como máximo, igual a $90° - \theta_L$. Con estas consideraciones, la ley de Snel aplicada a la superficie de separación entre el aire y la fibra, nos permite calcular el ángulo θ:

$$n_{aire} \cdot \operatorname{sen}\theta = n_1 \cdot \operatorname{sen}(90° - \theta_L) \longrightarrow 1 \cdot \operatorname{sen}\theta = 1'52 \cdot \operatorname{sen}(16'15°)$$

$$\boxed{\theta \geq 25\,°}$$

Ejercicio A5

a) Considere las longitudes de onda asociadas a un electrón y un protón. ¿Cuál es menor si las dos partículas tienen la misma velocidad? ¿Y si tienen la misma energía cinética? (1 punto)

Las longitudes de onda asociadas a estas partículas vienen dadas por la fórmula de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

Si el electrón y el protón tienen la misma velocidad:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_e &= \frac{h}{m_e \cdot v} \\ \lambda_p &= \frac{h}{m_p \cdot v} \end{aligned}\right\} \frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{1/m_e}{1/m_p} = \frac{m_p}{m_e} \longrightarrow \lambda_e = \frac{m_p}{m_e} \cdot \lambda_p$$

$$\text{Siendo } m_p > m_e \longrightarrow \frac{m_p}{m_e} > 1 \longrightarrow \boxed{\lambda_e > \lambda_p}$$

Es decir, la longitud de onda asociada al protón es menor que la longitud de onda asociada al electrón.

Por otra parte, atendiendo a sus respectivas energías cinéticas, utilizamos la siguiente relación:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{(m \cdot v)^2}{2 \cdot m} = \frac{p^2}{2 \cdot m} \longrightarrow p = \sqrt{2 \cdot m \cdot E_c}$$

Entonces, cuando la energía cinética del electrón y el protón coinciden:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_e &= \frac{h}{p_e} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_c}} \\ \lambda_p &= \frac{h}{p_p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E_c}} \end{aligned}\right\} \frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{1/\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_c}}{1/\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E_c}} = \frac{\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E_c}}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_c}} = \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{m_e}} \longrightarrow \lambda_e = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \cdot \lambda_p$$

$$\text{Siendo } m_p > m_e \longrightarrow \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} > 1 \longrightarrow \boxed{\lambda_e > \lambda_p}$$

Es decir, también en este caso la longitud de onda asociada al protón es menor que la del electrón.

b) Complete las siguientes ecuaciones nucleares, sustituyendo los signos de interrogación por lo que proceda: (1 punto)

$$\mathbf{{}^{220}_{88}Ra \longrightarrow {}^{\boxed{?}}_{\boxed{?}}Ac + {}^{\;0}_{-1}\boxed{?}}$$

$$\mathbf{{}^{209}_{84}Po \longrightarrow {}^{205}_{82}Pb + {}^{\boxed{?}}_{\boxed{?}}\boxed{?}}$$

Para completar estas ecuaciones nucleares tendremos en cuenta que:

— El número de nucleones (protones más neutrones) se conserva.

— La carga total a ambos lados de la ecuación debe ser la misma.

Teniendo esto en cuenta, la primera ecuación queda:

$${}^{220}_{88}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{220}_{89}\mathrm{Ac} + {}^{\;0}_{-1}e$$

En este proceso, el número de nucleones del actinio es igual al número de nucleones del radio, pero el número atómico ha aumentado, lo que significa que un neutrón se ha convertido en un protón, con la consiguiente emisión de un electrón (radiación β^-) y un antineutrino electrónico ($\bar{\nu}_e$):

$${}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{\;0}_{-1}e + \bar{\nu}_e$$

Por su parte, la segunda ecuación describe el siguiente proceso:

$${}^{209}_{84}\mathrm{Po} \longrightarrow {}^{205}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

En este caso el isótopo de polonio se ha desintegrado en otro de plomo, que posee cuatro nucleones menos (dos protones y dos electrones). Esto se corresponde con una desintegración α, pues se emiten partículas α, es decir, núcleos de helio, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Opción B

Ejercicio B1

Se desea colocar en órbita un satélite de 750 kg lanzándolo desde el ecuador, de modo que un observador terrestre lo vea siempre en el mismo punto del firmamento (satélite geoestacionario).

a) ¿A qué altura, desde la superficie terrestre, orbitará el satélite? (0′75 puntos)

Un satélite geoestacionario se caracteriza por tener un periodo orbital T igual al de la Tierra. Es decir, $T = 1 \text{ día sidéreo} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 3'5 \text{ s} = 86\,163'5 \text{ s}$.

Igualando la fuerza gravitatoria a la fuerza centrípeta:

$$\left.\begin{aligned} G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \longrightarrow G \cdot \frac{M_T}{r} = v^2 \\ v^2 = (\omega \cdot r)^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \cdot r\right)^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow G \cdot \frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

De donde se tiene que el radio orbital de un satélite geoestacionario es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(6'67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}) \cdot (5'98 \cdot 10^{24} \text{ kg}) \cdot (86\,163'5 \text{ s})^2}{4\pi^2}} = 4'22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Por tanto, la altura h a la que orbita sobre la superficie terrestre es de unos 35 800 km:

$$r = R_T + h \longrightarrow h = r - R_T = (4'22 \cdot 10^7 \text{ m}) - (6'37 \cdot 10^6 \text{ m}) \longrightarrow \boxed{h = 3'58 \cdot 10^7 \text{ m}}$$

b) ¿Cuánta energía será preciso suministrarle para que alcance dicha órbita? (0′75 puntos)

La energía que hay que suministrar a un satélite para ponerlo en órbita es igual a la diferencia entre la energía mecánica del satélite en la órbita y su energía mecánica en la superficie:

$$\Delta E_m = E_m(\text{órbita}) - E_m(\text{superficie}) = E_{c2} + E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} + G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

Teniendo en cuenta que, en la órbita, la fuerza de atracción gravitatoria es la fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \longrightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \longrightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}$$

Sustituyendo v^2 en la primera expresión:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} + G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} + G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

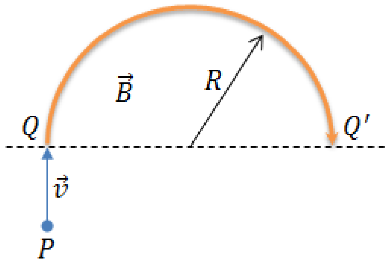
Siendo G, M_T y R_T constantes conocidas, la masa del satélite $m = 750$ kg y r el radio de la órbita que se ha calculado en el apartado anterior:

$$\Delta E_m = (6'67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}) \cdot (5'98 \cdot 10^{24} \text{ kg}) \cdot (750 \text{ kg}) \cdot \left(\frac{1}{6'37 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{2 \cdot 4'22 \cdot 10^7 \text{ m}}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_m = 4'34 \cdot 10^{10} \text{ J}}$$

Ejercicio B2

Una partícula P, de carga q y masa m, que se mueve a velocidad constante v, cruza la línea QQ' a partir de la cual existe un campo magnético B, que le obliga a seguir una trayectoria semicircular de radio R. La partícula necesita un tiempo T para recorrer la semicircunferencia que va de Q a Q'.



a) Calcule el nuevo radio de la semicircunferencia y el tiempo que tardaría en recorrerla si se tratase de una partícula idéntica a P, con carga $2q$. (1'5 puntos)

Cuando sobre una partícula con carga q que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ actúa un campo magnético $\vec{B}$, surge una fuerza magnética que actúa sobre ella, perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{B}$ e igual a:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

El módulo de esta fuerza, llamada fuerza de Lorentz, depende del ángulo α que forman $\vec{v}$ y $\vec{B}$:

$$F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Cuando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares:

$$F = |q| \cdot v \cdot B$$

Si el campo magnético es uniforme, esta fuerza conduce a la partícula a lo largo de una trayectoria circular de radio R, por lo que es una fuerza centrípeta:

$$|q| \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R} \longrightarrow R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$$

El radio R es inversamente proporcional a la carga q de la partícula, por lo que al duplicar la carga, el radio se reduce a la mitad:

$$\text{Si } q' = 2q \longrightarrow R' = \frac{m \cdot v}{|2q| \cdot B} \longrightarrow \boxed{R' = \frac{R}{2}}$$

Por otro lado, en un movimiento circular, $v = \omega \cdot R$, donde ω es la velocidad angular, que se relaciona con el periodo T mediante la expresión $\omega = 2\pi/T$. Teniendo en cuenta estas equivalencias:

$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{T} \cdot R \longrightarrow T = \frac{2\pi \cdot R}{v}$$

El periodo, y por tanto, también el semiperiodo, es proporcional al radio, de modo que:

$$\text{Si } R' = \frac{R}{2} \longrightarrow T' = \frac{2\pi \cdot R'}{v} = \frac{\pi \cdot R}{v} \longrightarrow \boxed{T' = \frac{T}{2}}$$

b) Razone si es verdadera o falsa la afirmación: *Puede existir fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado en un instante de tiempo en que el flujo magnético a través de dicho circuito es nulo”.* (1′5 puntos)

Según la ley de Faraday–Lenz, la fuerza electromotriz inducida en un circuito es proporcional a la rapidez con que varía el flujo magnético a través del mismo:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_{\mathrm{m}}}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$$

El signo menos indica que el sentido de la corriente inducida es tal que el campo magnético creado por dicha corriente tiende a oponerse a la variación del flujo magnético que la ha originado.

Según esto, aunque haya campo magnético, si no hay variación de flujo, no se inducirá corriente en el circuito. Si, por la razón que sea, el flujo está variando, <u>aparecerá una corriente inducida, aun cuando instantáneamente el flujo sea nulo en el transcurso de la variación</u>.

Por ejemplo, supongamos un flujo magnético que varía de acuerdo a la expresión $\Phi_m = -t^2 + 4t$ Wb. Este flujo se anula en $t = 0$ y en $t = 4$ s. Ahora bien, la fuerza electromotriz vendrá dada por:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d(-t^2 + 4t)}{dt} = -(-2t + 4) = 2t - 4$$

Comprobándose que ni en $t = 0$ ni en $t = 4$ la fuerza electromotriz inducida se anula. De hecho, esta sólo es nula en $t = 2$, momento en el que la corriente cambia de sentido.

Ejercicio B3

a) Si sumergimos repetidamente el dedo en un plato lleno de agua generamos ondas. ¿Qué sucede con la longitud de onda si sumergimos el dedo con una frecuencia mayor? ¿Por qué? (1 punto)

Cuando una onda se propaga por un medio homogéneo, su velocidad de propagación es una cantidad constante e independiente de la frecuencia de la perturbación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Por tanto, si se aumenta la frecuencia, la longitud de onda disminuye en la misma proporción.

b) La intensidad del sonido de una sirena a 50 m de distancia de la fuente emisora es $I = 0'10$ W · m^{-2}. ¿Cuál es la intensidad a 1 000 metros de distancia? (1 punto)

La intensidad de una onda se define como la cantidad de energía que transporta por unidad de tiempo a una unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación:

$$I = \frac{E}{t \cdot S}$$

Teniendo en cuenta que la potencia es, precisamente, la energía por unidad de tiempo:

$$I = \frac{P}{S}$$

Además, si consideramos que el medio a través del cual se propaga el sonido es isótropo, los frentes de ondas sonoras son superficies esféricas:

$$I = \frac{P}{4\pi \cdot r^2}$$

Así pues, la intensidad del sonido disminuye al alejarse del foco, de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$I \propto \frac{1}{r^2} \longrightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{1/r_1^2}{1/r_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

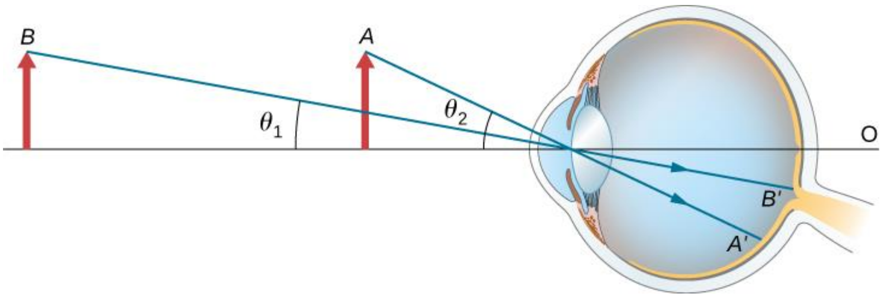
Si a una distancia $r_1 = 50\ \mathrm{m}$ de la fuente emisora la intensidad es $I_1 = 0'10\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$, a una distancia $r_2 = 1\,000\ \mathrm{m}$, la intensidad es:

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot r_1^2}{r_2^2} = \frac{(0'10\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}) \cdot (50\ \mathrm{m})^2}{(1\,000\ \mathrm{m})^2} \longrightarrow \boxed{I_2 = 2'5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}}$$

Ejercicio B4

a) Explique razonadamente si es cierta o falsa la siguiente frase: *Las lupas que se utilizan para ver aumentado un escrito son convergentes y la distancia entre la lupa y el escrito debe ser mayor que la distancia focal.* (0'5 puntos)

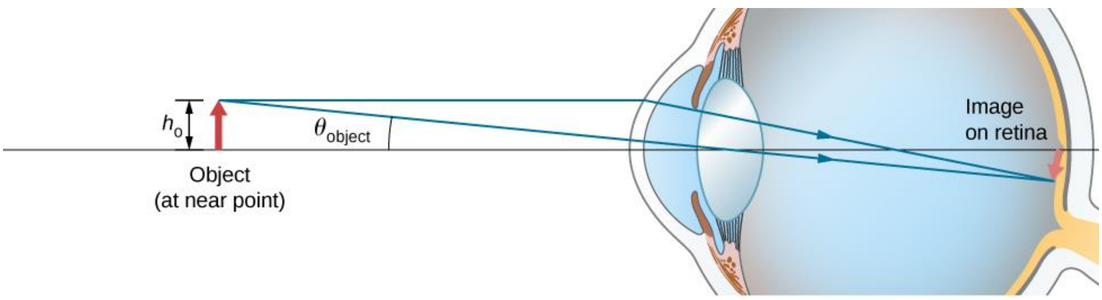
Si queremos ver un objeto con un tamaño mayor basta con que lo acerquemos al ojo para conseguirlo:



El tamaño de la imagen que se forma de un objeto en la retina es proporcional al ángulo θ subtendido por el objeto que, en la aproximación paraxial, viene determinado por:

$$\theta = \frac{\text{altura del objeto}}{\text{distancia objeto}} = \frac{h}{s}$$

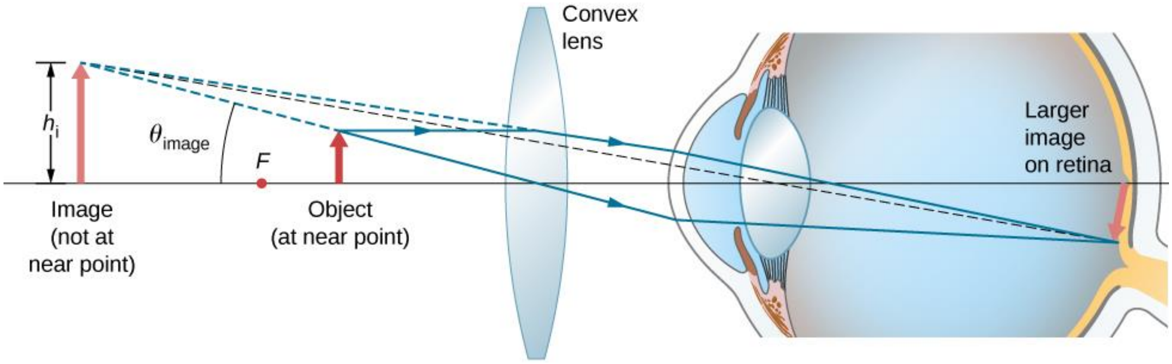
Sin embargo, existe un límite, denominado punto próximo, que es la distancia máxima a la que el ojo es capaz de enfocar un objeto con nitidez.



Por lo que el ángulo θ máximo es el que existe cuando el objeto se sitúa en este punto próximo:

$$\theta_{\text{máx}} = \frac{\text{altura del objeto}}{\text{distancia punto próximo}} = \frac{h}{s_{\text{próx}}}$$

Para aumentar el tamaño de la imagen observada, habría que incrementar el valor de dicho ángulo. Esto se puede lograr haciendo uso de una lupa, que no es más que una lente convergente (biconvexa) que, en determinadas circunstancias, puede proporcionar una imagen aumentada del objeto situada a una distancia mayor que la del punto próximo. Para conseguirlo, si situamos la lupa prácticamente pegada al ojo, el objeto debería encontrarse a una distancia s menor que la distancia focal f. De esta manera, la imagen sería virtual, derecha y de mayor tamaño, y la lupa desempeñaría adecuadamente su función:



El mayor aumento se consigue cuando el objeto se sitúa exactamente en el foco de la lente:

$$\theta'_{\text{máx}} = \frac{\text{altura del objeto}}{\text{distancia focal}} = \frac{h}{f}$$

Así pues, el aumento angular de la lupa, M, definido como la relación entre el tamaño angular de la imagen formada en la retina con la lupa y el tamaño angular de la imagen a ojo desnudo, resulta:

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{s_{\text{próx}}}{f}$$

b) En el fondo de una piscina de 2 metros de profundidad, llena de agua ($n = 1'33$), hay un punto luminoso. Calcule el diámetro mínimo del disco opaco que debería poner flotando en el agua para que no se pueda ver desde fuera el punto luminoso. (1 punto)

El disco deberá tapar todos los rayos de luz capaces de refractarse, que son los que veríamos desde el exterior de la piscina. Estos rayos serían aquellos que inciden con un ángulo menor al ángulo crítico o límite, pues para ángulos mayores se produciría reflexión total interna. El ángulo límite, θ_L, es aquel para el cual el ángulo de refracción es de 90°. Según la ley de Snel:

$$n_{agua} \cdot \operatorname{sen} \theta_L = n_{aire} \cdot \operatorname{sen} 90 \longrightarrow \theta_L = \operatorname{arc\,sen} \frac{n_{aire}}{n_{agua}} = 48'75°$$

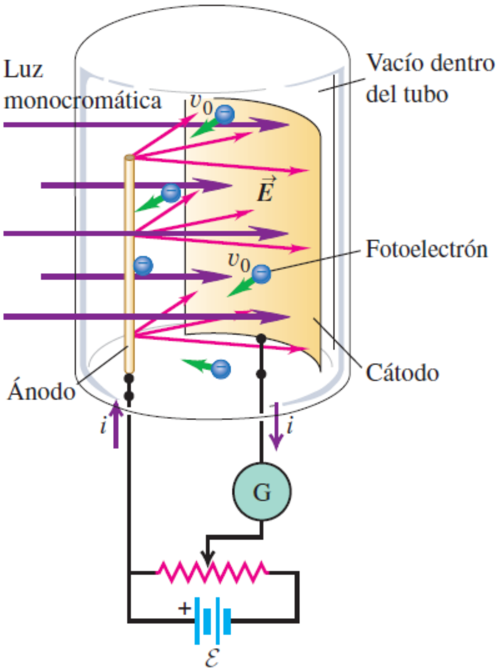
Para que los rayos que llegan a la superficie con un ángulo menor que $48'75°$, el disco deberá tener un radio mínimo dado por:

$$\tan \theta_L = \frac{\text{radio disco}}{\text{profundidad}} \longrightarrow r = (2\text{ m}) \cdot \tan(48'75°) = 2'28\text{ m} \longrightarrow \boxed{\text{Diámetro} = 4'56\text{ m}}$$

Ejercicio B5

a) Explique el efecto fotoeléctrico. (1 punto)

El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión (fotoemisión) de electrones (fotoelectrones) por parte de un material, generalmente metálico (aunque también ocurre en dieléctricos y semiconductores), al incidir sobre él radiación electromagnética de determinadas características.



La emisión de electrones se constata pues aparece una corriente eléctrica entre el cátodo y el ánodo. Ciertas características del efecto fotoeléctrico no pueden ser explicadas mediante la mecánica clásica:

- Cuando sobre el cátodo incide luz monocromática, no se emiten fotoelectrones a menos que su frecuencia sea mayor que cierto valor mínimo, llamado frecuencia umbral[1] (ν_0 o f_0), que depende únicamente del material del cátodo.

- Cuando la frecuencia de la luz es mayor que la frecuencia umbral, los electrones salen despedidos a gran velocidad. La energía cinética máxima de los electrones aumenta con la frecuencia, pero es independiente de la intensidad de la luz.

- La emisión del fotoelectrón es instantánea y el número de estos que se desprenden aumenta con la intensidad de la luz incidente.

Einstein explicó el efecto fotoeléctrico aplicando a la luz las ideas de Planck sobre la radiación térmica (explicación de la radiación de un cuerpo negro). Así pues, supuso que la luz se propaga en el espacio transportando energía en forma de cuantos de luz, llamados fotones. Según la hipótesis de Einstein, la energía de los fotones está determinada por la fórmula de Planck:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

[1] En términos de longitud de onda, diremos que no se produce emisión de fotoelectrones cuando la luz incidente supera un valor máximo denominado longitud de onda umbral (λ_0).

Teniendo esto en cuenta, el proceso de interacción de la luz con el cátodo se puede considerar ahora como un choque inelástico de los fotones con los electrones: el fotón es absorbido y su energía es transferida al electrón instantáneamente. El electrón invierte parte de la energía en escapar del átomo en el que está confinado y la energía sobrante, suponiendo que no hay pérdidas en forma de calor, le comunica cierta velocidad.

Así, aplicando el principio de conservación de la energía al choque entre un fotón y un electrón:

$$E_{\text{fotón}} = E_0 + E_c$$

Donde E_0 representa la energía mínima necesaria para arrancar un electrón, que es característica del elemento metálico empleado, y que usualmente recibe el nombre de energía o trabajo de extracción. Así, para que se produzca efecto fotoeléctrico, el fotón debe llevar, como mínimo, una energía igual a E_0, en cuyo caso a la frecuencia del fotón se le denomina frecuencia umbral, f_0. En consecuencia:

$$E_0 = h \cdot f_0$$

Por su parte, E_c representa el valor máximo de la energía cinética que puede tener el electrón, cuando no se ha producido ninguna pérdida en forma de calor:

$$E_c(\text{máx}) = E_{fotón} - E_0 = h \cdot f - h \cdot f_0 = h \cdot (f - f_0)$$

b) Calcule el trabajo de extracción de un metal del que se observa que la velocidad máxima de los electrones emitidos si se ilumina con una radiación de 400 nm de longitud de onda es el doble que cuando se ilumina con luz de longitud de onda 500 nm. (1 punto)

Aplicando la fórmula de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$E_{fotón} = E_0 + E_c \longrightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_0 + \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_{\text{máx}}^2$$

Cuando se ilumina el metal con una luz de longitud de onda $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-7}$ m, la velocidad máxima de los electrones es v_1, mientras que si la longitud de onda es $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ m, la velocidad máxima es v_2. Si tenemos en cuenta que $v_1 = 2 \cdot v_2$

$$\left.\begin{array}{r} h \cdot \dfrac{c}{\lambda_1} = E_0 + \dfrac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_1^2 \\ h \cdot \dfrac{c}{\lambda_2} = E_0 + \dfrac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_2^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{c} h \cdot \dfrac{c}{\lambda_1} = E_0 + \dfrac{1}{2} \cdot m_e \cdot (2 \cdot v_2)^2 \\ h \cdot \dfrac{c}{\lambda_2} = E_0 + \dfrac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_2^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} h \cdot \dfrac{c}{\lambda_1} = E_0 + 2 \cdot m_e \cdot v_2^2 \\ h \cdot \dfrac{c}{\lambda_2} = E_0 + \dfrac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_2^2 \end{array}\right\}$$

Multiplicando por cuatro la segunda ecuación y restando ambas:

$$\left.\begin{array}{r} h \cdot \dfrac{c}{\lambda_1} = E_0 + 2 \cdot m_e \cdot v_2^2 \\ 4 \cdot h \cdot \dfrac{c}{\lambda_2} = 4 \cdot E_0 + 2 \cdot m_e \cdot v_2^2 \end{array}\right\} \longrightarrow 4 \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda_2} - h \cdot \frac{c}{\lambda_1} = 3 \cdot E_0 \longrightarrow E_0 = \frac{h \cdot c}{3} \cdot \left(\frac{4}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

Sustituyendo h, c, λ_1 y λ_2 por sus respectivos valores:

$$E_0 = \frac{(6'63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}) \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})}{3} \cdot \left(\frac{4}{5 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{4 \cdot 10^{-7}}\right) \longrightarrow \boxed{E_0 = 3'65 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2'28\ \text{eV}}$$