Opción A

Ejercicio A1

a) Discutir, en función del valor de m, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ my+mz=2 \end{cases}$ y resolverlo para $m=-1$. (1'5 puntos)

El sistema posee dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que no podrá ser, en ningún caso, un sistema compatible determinado. Analizaremos en qué condiciones el sistema será compatible indeterminado y cuándo, incompatible.

Para convertir el sistema en otro con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, pasaremos al segundo miembro una de ellas y la trataremos como un parámetro. Haciendo $z=\lambda$:

$$\begin{cases} mx+y=-\lambda \\ my=2-m\lambda \end{cases}$$

Evaluamos el rango de la matriz de los coeficientes en función de m:

$$M=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix} \longrightarrow |M|=m^2=0 \longrightarrow m=0$$

$$\text{Si } m=0 \longrightarrow M^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, si $m=0$, el determinante de la matriz de los coeficientes es $|M|=0$, por lo que el rango de M es 1, mientras que el rango de la matriz ampliada M^* es 2. El sistema es incompatible.

$$\boxed{\text{Si } m=0 \longrightarrow \text{Sistema incompatible}}$$

Sin embargo, cuando $m\neq 0$, el determinante de la matriz M es $|M|\neq 0$, por lo que el rango de M es 2, el mismo que el rango de la matriz ampliada. El sistema es compatible determinado.

$$\boxed{\text{Si } m\neq 0 \longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}}$$

Para caso de $m=-1$, el sistema será compatible determinado y su solución es:

$$\begin{cases} -x+y=-\lambda \\ -y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=y+\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\text{Siendo } y=-2-\lambda \longrightarrow x=y+\lambda=-2-\lambda+\lambda=-2$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{cases} x=-2 \\ y=-2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Para $m = 1$ añadir una ecuación al sistema del apartado a) para obtener: en un caso, un sistema compatible determinado y, en otro caso, un sistema incompatible. (1 punto)

Para $m = 1$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y + z = 2 \end{cases}$$

Para que sea incompatible, la ecuación que añadimos ha de ser de la forma:

$$a \cdot (x + y + z) + b \cdot (y + z) = k, \qquad \text{con } k \neq 2 \cdot b$$

La restricción $k \neq 2 \cdot b$ se impone para que la tercera ecuación no sea una combinación lineal de las otras dos. Así, por ejemplo, haciendo $a = 1$ y $b = 0$, el sistema será incompatible para cualquier valor de k tal que $k \neq 0$:

$$\boxed{\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y + z = 2 \\ x + y + z = k \end{cases} \quad (\text{si } k \neq 0) \longrightarrow \text{Sistema incompatible}}$$

Por otra parte, para conseguir un sistema compatible determinado, basta con añadir una ecuación del tipo $ax + by + cz = 0$, tal que satisfaga que el determinante de la matriz de los coeficientes no sea nulo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 2 \\ ax + by + cz = 0 \end{cases} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \longrightarrow |M| = c + a - a - b = c - b \neq 0 \longrightarrow c \neq b$$

Es decir, se puede incorporar una ecuación de la forma $ax + by + cz = 0$ en la que la única restricción a los valores posibles de a, b y c es que $b \neq c$. Por ejemplo:

$$\boxed{\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Sistema compatible determinado}}$$

Podemos comprobar que este sistema, efectivamente, tiene una única solución determinada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_2 \to F_3]{F_1 - F_2 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Ejercicio A2

a) Determinar la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 5x - y + 2z = 4$. (1 punto)

Expresamos la recta r en forma paramétrica.

Restando las ecuaciones: $x + y = 1 \longrightarrow y = 1 - x$

Sustituyendo y: $2x - 1 + x + z = 2 \longrightarrow z = 3 - 3x$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Haciendo $x = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases}$$

Por lo que el vector director de r es $\vec{u}(1, -1, -3)$, y un punto de la recta es $P(0, 1, 3)$.

Por otra parte, el vector normal al plano π es $\vec{n}(5, -1, 2)$. Si $\vec{n}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares, su producto escalar es nulo, y la recta r y el plano π son paralelos o coincidentes:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (5, -1, 2) \cdot (1, -1, -3) = 5 + 1 - 6 = 0$$

Sustituyendo $P(0, 1, 3)$ en el plano π:

$$5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot 3 \neq 4$$

Luego, P no pertenece a π, así que <u>la recta y el plano son paralelos</u>.

b) Dadas las rectas:

$$\boldsymbol{r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{5}}, \qquad \boldsymbol{r_2 \equiv \begin{cases} -x + 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}}$$

Calcular el plano que contiene a r_1 y es paralelo a r_2. (1'5 puntos)

La recta r_1 pasa por el punto $P_1(1, 0, 0)$ y tiene como vector director $\vec{u}(2, -1, 5)$. En forma paramétrica es:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

La recta r_2 en forma paramétrica se obtiene:

Sumando las dos ecuaciones: $x - y = 4 \longrightarrow x = 4 + y$

Sustituyendo x: $-y - 4 + 2y - z = 3 \longrightarrow z = -7 + y$

Siendo $y = \lambda \longrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -7 + \lambda \end{cases}$

Por lo que la recta r_2 pasa por el punto $P_2(4, 0, -7)$ y su vector director es $\vec{v}(1, 1, 1)$.

El plano que contiene a r_1 y es paralelo a r_2 se define a partir de los vectores $\vec{u}(2, -1, 5)$ y $\vec{v}(1, 1, 1)$, y un punto que pertenezca al plano, como es el punto $P_1(1, 0, 0)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow -6 \cdot (x-1) + 3 \cdot y + 3 \cdot z = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -6x + 3y + 3z + 6 = 0}$$

Al simplificar, el plano queda $\pi \equiv -2x + y + z + 2 = 0$ o, también, $\pi \equiv 2x - y - z - 2 = 0$.

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = 2 \cdot e^{-2|x|}$, estudiar: derivabilidad, crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y asíntotas. ($2'5$ puntos)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 2e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -4e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 4e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La función es continua en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2e^{-2x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2e^{2x} = 2 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2 \longrightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Sin embargo, no es derivable en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} -4e^{-2x} = -4 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 4e^{2x} = 4 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \longrightarrow \text{No derivable en } x = 0$$

Por lo que en el punto $(0, 2)$ será un punto anguloso.

Para estudiar su crecimiento/decrecimiento analizamos el signo de su derivada primera, y tendremos en cuenta que la función e^x es siempre positiva, por lo que:

$$\text{Cuando } x \geq 0 \longrightarrow f'(x) = -\frac{4}{e^{2x}} \longrightarrow f'(x) < 0 \;\; \forall\, x \geq 0 \longrightarrow \text{Decreciente}$$

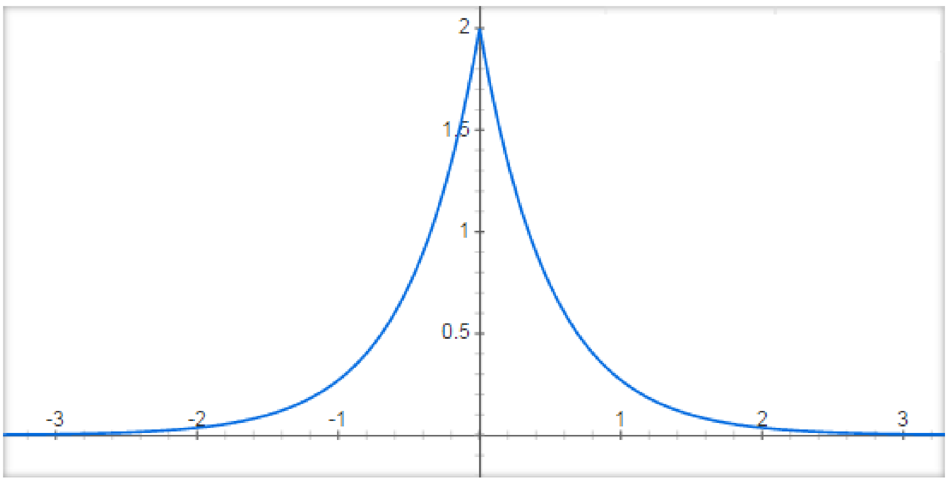
$$\text{Cuando } x < 0 \longrightarrow f'(x) = +4e^{2x} \longrightarrow f'(x) > 0 \;\; \forall\, x < 0 \longrightarrow \text{Creciente}$$

Según esto, en $x = 0$, es decir, en el punto anguloso $(0, 2)$ hay un máximo.

Dado que está definida en todo $\mathbb{R}$, no presenta asíntotas verticales. Para saber si tiene asíntotas horizontales u oblicuas, analizamos sus ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2e^{-2x}) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{e^{2x}}\right) = 0 \longrightarrow \text{Asíntota horizontal } \; y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2e^{2x}) = \lim_{x \to +\infty} (2e^{-2x}) = 0 \longrightarrow \text{Asíntota horizontal } \; y = 0$$



Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A4

a) Calcular: (1 punto)

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \left(e^{1/x} - 1\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \left(e^{1/x} - 1\right) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} e^{1/x}$$
$$= e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

b) Consideremos la función $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$ con $m \geq 0$. Calcular el valor de m para que el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ sea 10. (1'5 puntos)

El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ coincide con la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$:

$$A = \int_0^2 (x^3 + mx^2 + 1) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{mx^3}{3} + x\right]_0^2 = \left(4 + \frac{8m}{3} + 2\right) - (0) = 6 + \frac{8m}{3}$$

Esta área es igual a 10, por lo que:

$$6 + \frac{8m}{3} = 10 \longrightarrow \frac{8m}{3} = 4 \longrightarrow 8m = 12 \longrightarrow m = \frac{12}{8} \longrightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

Opción B

Ejercicio B1

a) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y tal que $|A| = 2$. ¿Tiene inversa la matriz A^4? Calcular $|5A^{-1}|$ y $|(5A)^{-1}|$. (1'5 puntos)

Para que una matriz tenga inversa, su determinante ha de ser distinto de cero. En nuestro caso, para que la matriz A^4 sea invertible (es decir, sea una matriz regular), tiene que cumplirse que $|A^4| \neq 0$:

$$|A^4| = |A \cdot A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^4 = 2^4 = 16 \neq 0$$

Es decir, <u>la matriz sí tiene A^4 sí tiene inversa</u>.

Por otra parte, para calcular $|5A^{-1}|$ debemos conocer $|A^{-1}|$. Para ello, partiremos de la definición de matriz inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I \longrightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \longrightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \longrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

Además, hay que tener en cuenta que A es una matriz de orden 3, por lo que cuando se la multiplica por un número k, su determinante queda multiplicado por k^3:

$$|5A^{-1}| = 5^3 \cdot |A^{-1}| = 125 \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{|5A^{-1}| = \frac{125}{2}}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Finalmente, calculamos $|(5A)^{-1}|$, aplicando las propiedades de los determinantes ya mencionadas:

$$|(5A)^{-1}| = \frac{1}{|5A|} = \frac{1}{5^3 \cdot |A|} = \frac{1}{125 \cdot 2} \longrightarrow \boxed{|(5A)^{-1}| = \frac{1}{250}}$$

b) ¿Para qué valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ el rango de la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a+1} & \boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ es 1? (1 punto)

Para que el rango de la matriz dada sea 1, su determinante debe ser nulo (en cuyo caso, tendremos que sus dos filas son linealmente dependientes):

$$\begin{vmatrix} a+1 & 6 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a \cdot (a+1) - 12 = a^2 + a - 12 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 3 \\ a = -4 \end{cases}}$$

Ejercicio B2

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi \equiv 2x - 2y + 4z - 5 = 0}$ y que contiene a los puntos $\boldsymbol{(-2, 0, 0)}$ y $\boldsymbol{(0, 1, 0)}$. (1'25 puntos)

El vector normal al plano π es $\vec{n}(2, -2, 4)$. Este vector es perpendicular al plano π, por lo que es un vector paralelo al plano buscado π'. Otro vector de π' es el que se define a partir de los puntos dados, $A(-2, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$: $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$.

Con los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{AB}$, y un punto, por ejemplo, $A(-2, 0, 0)$, la ecuación de π' es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow -4 \cdot (x+2) + 8 \cdot y + 6 \cdot z = 0$$

$$-4x + 8y + 6z - 8 = 0$$

$$\boxed{\pi' \equiv 2x - 4y - 3z + 4 = 0}$$

b) Dos caras de un cubo están contenidas en los planos $\boldsymbol{\pi_1 \equiv 2x - 2y + z - 1 = 0}$ y $\boldsymbol{\pi_2 \equiv 2x - 2y + z + 5 = 0}$. Calcular el volumen de dicho cubo. (1'25 puntos)

Ambos planos tienen el mismo vector normal $\vec{n} = (2, -2, +1)$, es decir, son planos paralelos, por lo que podemos calcular la distancia entre ellos, siendo $d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)$, donde P_1 es un punto del plano π_1, por ejemplo, el punto $(0, 0, 1)$.

Aplicando la fórmula para la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D$:

$$d(P, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \longrightarrow d(P_1, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2$$

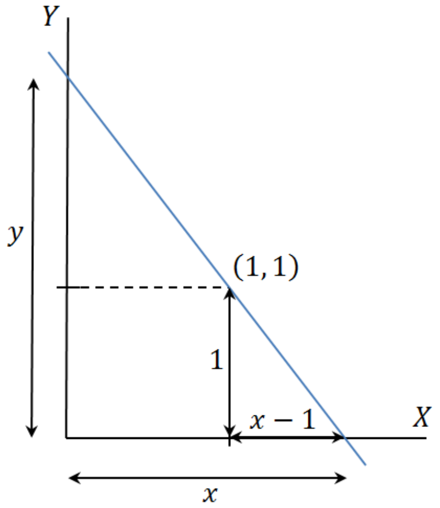
Como dos de las caras paralelas del cubo están contenidas en estos planos, esta distancia representa la longitud de los lados del cubo, por lo que su volumen es:

$$V = d^3 = 2^3 \text{ u}^3 \longrightarrow \boxed{V = 8 \text{ u}^3}$$

Ejercicio B3

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,1)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante. (2'5 puntos)

El área de triángulo que forma la recta con los ejes es:



$$A = \frac{x \cdot y}{2}$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x-1} \longrightarrow y = \frac{x}{x-1}$$

Por lo que el área queda:

$$A = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{2 \cdot (x-1)}$$

Optimizando el área:

$$A(x) = \frac{x^2}{2 \cdot (x-1)} \longrightarrow A'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2}{2 \cdot (x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{2 \cdot (x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{2 \cdot (x-1)^2}$$

$$A'(x) = 0 \longrightarrow x^2 - 2x = 0 \longrightarrow x \cdot (x-2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

La solución $x = 0$ no es válida, pues $x > 1$. En $x = 2$ hay un mínimo, como se puede comprobar evaluando el signo de la segunda derivada en este punto:

$$A''(x) = \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - 2 \cdot (x^2 - 2x) \cdot (x-1)}{2 \cdot (x-1)^4} = \frac{(2x-2) \cdot (x-1) - 2 \cdot (x^2 - 2x)}{2 \cdot (x-1)^3}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{2 \cdot (x-1)^3} = \frac{2}{2 \cdot (x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$A''(2) = \frac{1}{(2-1)^3} = 1 > 0 \longrightarrow \text{Mínimo}$$

De modo que los valores x e y para los cuales el área del triángulo es mínima son:

$$x = 2 \longrightarrow y = 2$$

Es decir, la recta corta al eje OX en el punto $(2,0)$ y al eje OY en el punto $(0,2)$. De modo que la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{0-2}{2-0} = -1$$

Y la ordenada en el origen (valor de y cuando $x = 0$) es $n = 2$. Por lo que la ecuación de la recta buscada es:

$$y = mx + n \longrightarrow \boxed{y = -x + 2}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio B4

Se considera la parábola $y = -x^2 + 2x$.

a) Calcular las rectas tangentes a dicha parábola en sus puntos de intersección con el eje OX. (0'75 puntos)

Calculamos los puntos de intersección de la curva con el eje OX:

$$y = 0 \longrightarrow -x^2 + 2x = 0 \longrightarrow x \cdot (-x + 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow \text{Punto } (0,0) \\ x = 2 \longrightarrow \text{Punto } (2,0) \end{cases}$$

Determinamos la pendiente de las rectas tangente a la curva en estos puntos:

$$y' = -2x + 2 \longrightarrow \begin{cases} y'(0) = 2 \\ y'(2) = -2 \end{cases}$$

De modo que las ecuaciones de las rectas son:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

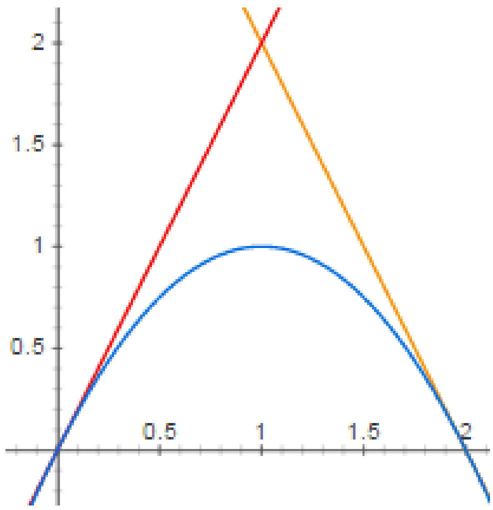
$$\boxed{\text{Tangente en } (0,0) \longrightarrow y = 2x}, \qquad \boxed{\text{Tangente en } (2,0) \longrightarrow y = -2(x-2)}$$

b) Calcular el área delimitada por la gráfica de dicha parábola y las rectas tangentes obtenidas en el apartado a). (1'75 puntos)

Las dos rectas se cortan en:

$$2x = -2x + 4 \longrightarrow 4x = 4 \longrightarrow x = 1$$

Así, el área se calcula en dos intervalos: el primero, entre 0 y 1; el segundo, entre 1 y 2.



$$A_1 = \int_0^1 [(2x) - (-x^2 + 2x)] \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 [(-2x + 4) - (-x^2 + 2x)] \cdot dx$$

$$= \int_1^2 [x^2 - 4x + 4] \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right) = \frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, el área buscada es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u}^2}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com