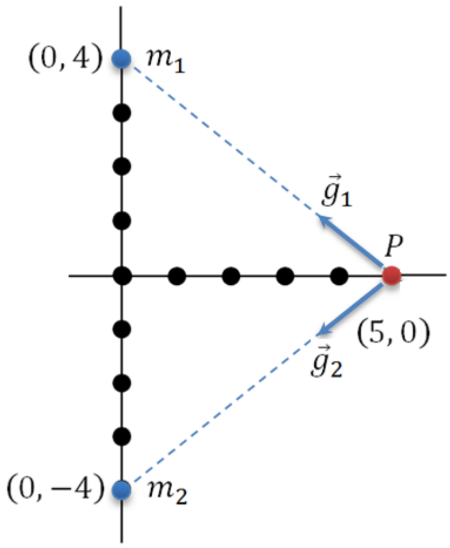
CONSTANTES FÍSICAS	
Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre	$g = 9'80\ \mathrm{m/s^2}$
Carga elemental	$e = 1'60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Constante de gravitación universal	$G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
Constante de Planck	$h = 6'63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
Constante eléctrica en el vacío	$K = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9'00 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$
Electronvoltio	$1\ \mathrm{eV} = 1'60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$
Masa de la Tierra	$M_T = 5'98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9'11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$
Radio de la Tierra	$R_T = 6'37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$
Unidad de masa atómica	$1\ \mathrm{u} = 1'66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3'00 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$

Opción A

Ejercicio A1

a) Calcule la intensidad del campo gravitatorio en el punto $P(5,0)$ m, generado por dos masas iguales de 8 kg situadas en los puntos $(0,4)$ m y $(0,-4)$ m, respectivamente. (1'2 puntos)



La intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto se define como la fuerza de atracción gravitatoria $\vec{F}_g$ que actúa sobre la unidad de masa situada en ese punto. Cuando el campo es creado por una masa puntual:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m'} = \frac{-G \cdot \dfrac{m \cdot m'}{r^2} \cdot \vec{u}_r}{m'} \longrightarrow \vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m'} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Cuando son dos las masas puntuales que crean el campo, la intensidad del campo gravitatorio es, en virtud del principio de superposición, la suma vectorial de las intensidades de campo debidas a cada una de las masas por separado:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r_2}$$

Siendo $\vec{r}_1$ el vector que une el punto donde se encuentra la masa m_1 con el punto P, y $\vec{r}_2$ el vector que une el punto donde se sitúa la masa m_2 con el punto P:

$$\vec{r}_1 = 5 \cdot \vec{\imath} - 4 \cdot \vec{\jmath} \text{ m} \longrightarrow \begin{cases} |\vec{r}_1| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41} \\ \vec{u}_{r_1} = \dfrac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \dfrac{5}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\imath} - \dfrac{4}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\vec{r}_2 = 5 \cdot \vec{\imath} + 4 \cdot \vec{\jmath} \text{ m} \longrightarrow \begin{cases} |\vec{r}_1| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\ \vec{u}_{r_1} = \dfrac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \dfrac{5}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\imath} + \dfrac{4}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\jmath} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $m_1 = m_2 = m$ y $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r$, la intensidad del campo gravitatorio en P se puede expresar como:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \left(\vec{u}_{r_1} + \vec{u}_{r_2}\right)$$

Haciendo las sustituciones correspondientes, la intensidad de campo gravitatorio $\vec{g}$ en P resulta:

$$\vec{g} = -(6'67 \cdot 10^{-11} \ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \cdot \frac{(8 \text{ kg})}{\left(\sqrt{41} \text{ m}\right)^2} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\imath} - \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\jmath} + \frac{5}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\imath} + \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{g} = -1'30 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{41}} \cdot \vec{\imath}\right) \longrightarrow \boxed{\vec{g} = -2'03 \cdot 10^{-11} \ \text{N/kg}}$$

b) Determine el potencial gravitatorio en el punto *P* de la configuración anterior. (0'8 puntos)

El potencial gravitatorio debido a una masa puntual m en un punto P situado, a una distancia r, viene dado por:

$$V = -G \cdot \frac{m}{r}$$

Por el principio de superposición, el potencial debido a dos masas m_1 y m_2, situadas a unas distancias r_1 y r_2, respectivamente, del punto P:

$$V = V_1 + V_2 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2}$$

Siendo $m_1 = m_2 = m = 8$ kg y $r_1 = r_2 = r = \sqrt{41}$ m:

$$V = -G \cdot \frac{m}{r} - G \cdot \frac{m}{r} = -2 \cdot G \cdot \frac{m}{r} = -2 \cdot (6'67 \cdot 10^{-11} \ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \cdot \frac{(8 \text{ kg})}{\left(\sqrt{41} \text{ m}\right)}$$

$$\boxed{V = -1'67 \cdot 10^{-10} \ \text{J/kg}}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A2

a) Considere un muelle ideal de constante elástica k en cuyo extremo está sujeta una masa m. El conjunto experimenta un movimiento vibratorio armónico simple de amplitud $A = 12$ cm. ¿Para qué elongación la energía potencial vale un tercio de la energía cinética? (1 punto)

El muelle constituye un oscilador armónico, cuya posición x en función del tiempo t viene dada por:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Derivando esta expresión, obtenemos la de la velocidad para cualquier instante es:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Al combinar ambas expresiones, obtenemos una fórmula que nos permite determinar la velocidad del muelle en función de su posición:

$$v^2 = A^2 \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0) = A^2 \cdot \omega^2 \cdot [1 - \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = A^2 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$
$$= A^2 \cdot \omega^2 - x^2 \cdot \omega^2 \longrightarrow v^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2) \longrightarrow v = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

Así que podemos expresar la energía cinética de la siguiente manera:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{m \cdot \omega^2}_{k} \cdot (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2)$$

Por otro lado, recordamos la expresión para la energía potencial elástica del muelle:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Para que la energía potencial sea un tercio de la energía cinética ha de cumplirse que:

$$3 \cdot E_p = E_c \longrightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) \longrightarrow 3 \cdot x^2 = A^2 - x^2 \longrightarrow 4 \cdot x^2 = A^2 \longrightarrow \boxed{x = \pm\frac{A}{2}}$$

b) Ahora se tienen dos muelles de constante elástica $k = 5\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ y masa despreciable. Al extremo del primer muelle se une una masa $m = 200$ g de modo que oscila con frecuencia f. ¿Qué masa hay que unir al segundo muelle para que oscile con frecuencia $2f$? (1 punto)

En primer lugar, buscamos la relación entre k y f:

$$\left.\begin{aligned} k &= m \cdot \omega^2 \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \end{aligned}\right\} \longrightarrow k = 4\pi \cdot m \cdot f^2 \longrightarrow \begin{cases} \text{Muelle 1: } k_1 = 4\pi \cdot m_1 \cdot f_1^2 \\ \text{Muelle 2: } k_2 = 4\pi \cdot m_2 \cdot f_2^2 \end{cases}$$

Como ambos muelles tienen la misma constante elástica, $k_1 = k_2$, y queremos que $f_2 = 2 \cdot f_1$:

$$m_1 \cdot f_1^2 = m_2 \cdot f_2^2 \longrightarrow m_1 \cdot f_1^2 = m_2 \cdot (2 \cdot f_1)^2 \longrightarrow m_1 \cdot f_1^2 = 4 \cdot m_2 \cdot f_1^2 \longrightarrow m_1 = 4 \cdot m_2 \longrightarrow m_2 = \frac{m_1}{4}$$

$$\text{Siendo } m_1 = 200 \text{ g} \longrightarrow \boxed{m_2 = 50 \text{ g}}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A3

Un rayo de luz monocromática, que se propaga en un medio de índice de refracción $1'58$, penetra en otro medio, de índice de refracción $1'23$, formando un ángulo de incidencia de $15°$ respecto a la normal a la superficie de separación entre ambos medios.

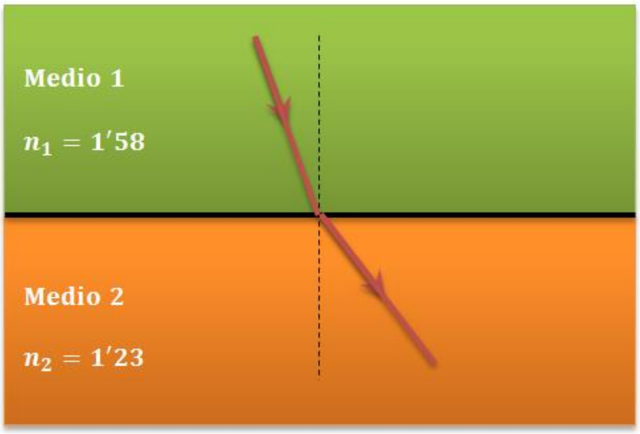
a) Determine el valor del ángulo de refracción correspondiente al ángulo de incidencia anterior. Efectúe un dibujo de la marcha de los rayos. (0'8 puntos)

La relación entre el ángulo de incidencia θ_1 y el ángulo de refracción θ_2, cuando un rayo de luz pasa de un medio de índice de refracción n_1 a otro de índice de refracción n_2 viene dada por la ley de Snel:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \cdot \operatorname{sen} \theta_2$$

Siendo $n_1 = 1'58$, $n_2 = 1'23$ y $\theta_1 = 15°$:

$$\operatorname{sen} \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \longrightarrow \theta_2 = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \operatorname{sen} \theta_1\right) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1'58}{1'23} \cdot \operatorname{sen} 15°\right) \longrightarrow \boxed{\theta_2 = 19°\, 25'\, 7''}$$



b) Explique el fenómeno de la reflexión total. Calcule el ángulo límite para los dos medios anteriores. (1'2 puntos)

La refracción se produce cuando un rayo de luz atraviesa la superficie de separación de dos medios de distinto índice de refracción. Cuando se produce desde un medio de menor índice de refracción a otro de mayor índice de refracción, $n_1 < n_2$, el rayo refractado se acerca a la normal:

$$\text{Ley de Snel} \longrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} < 1 \longrightarrow \operatorname{sen} \theta_2 < \operatorname{sen} \theta_1 \longrightarrow \theta_2 < \theta_1$$

De modo que no hay ninguna restricción y la refracción cuando $n_1 < n_2$ es posible para cualquier ángulo de incidencia. Sin embargo, cuando el índice de refracción del primer medio es mayor que el del segundo, $n_1 > n_2$, el rayo refractado se aleja de la normal:

$$\text{Ley de Snel} \longrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} > 1 \longrightarrow \operatorname{sen} \theta_2 > \operatorname{sen} \theta_1 \longrightarrow \theta_2 > \theta_1$$

En este caso, puede alcanzarse un valor del ángulo de incidencia tal que el ángulo de refracción sea de $90°$. Este valor del ángulo de incidencia se denomina ángulo límite o crítico y supone un valor máximo a partir del cual ya no es posible la refracción, produciéndose la reflexión total interna.

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

El valor del ángulo límite θ_L se puede calcular, por tanto, de la siguiente manera:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_L = n_2 \cdot \underbrace{\operatorname{sen} 90°}_{1} \longrightarrow \operatorname{sen}\theta_L = \frac{n_2}{n_1} \longrightarrow \theta_L = \operatorname{arc\,sen}\frac{n_2}{n_1}$$

Para $n_1 = 1'58$ y $n_2 = 1'23$:

$$\theta_L = \operatorname{arc\,sen}\frac{1'23}{1'58} \longrightarrow \boxed{\theta_L = 51°\,7'\,18''}$$

Ejercicio A4

a) Explique la relación entre campo y potencial electrostáticos. (1 punto)

El trabajo que realiza el campo electrostático, para transportar una carga desde un punto A hasta otro punto B es:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = q' \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Siendo este trabajo, por tratarse de un campo de fuerzas conservativo, igual a la menos variación de la energía potencial:

$$-\Delta E_p = q' \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \longrightarrow \frac{\Delta E_p}{q'} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \longrightarrow \frac{E_p(B) - E_p(A)}{q'} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Por la definición de potencial en un punto (energía potencial por unidad de carga positiva situada en ese punto):

$$\boxed{V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

En el caso en el que el campo eléctrico sea uniforme:

$$V_B - V_A = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{r} \longrightarrow V_B - V_A = -\vec{E} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Considerando que este campo se dirige a lo largo del eje X, para una carga positiva:

$$V_B - V_A = -E \cdot (x_B - x_A) \longrightarrow \Delta V = -E \cdot \Delta x$$

Si consideramos un desplazamiento diferencial, dx:

$$dV = -E \cdot dx \longrightarrow E = -\frac{dV}{dx} \longrightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dx} \cdot \vec{\imath}$$

Generalizando a las tres dimensiones del espacio:´

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\vec{\nabla}\, V}$$

La intensidad del campo eléctrico es, con signo cambiado, igual al gradiente de potencial eléctrico.

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Una partícula cargada se mueve espontáneamente hacia puntos en los que el potencial electrostático es mayor. Razone si de este comportamiento puede deducirse el signo de la carga. (1 punto)

El trabajo que realiza el campo cuando desplaza una carga q viene dado por:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -q\cdot\Delta V = -q\cdot(V_B - V_A) = q\cdot(V_A - V_B)$$

Para que este trabajo sea positivo, es decir, lo realice espontáneamente el campo:

$$\text{Si } q > 0 \longrightarrow V_A - V_B > 0 \longrightarrow V_A > V_B$$

$$\text{Si } q < 0 \longrightarrow V_A - V_B < 0 \longrightarrow V_A < V_B$$

Es decir, una carga positiva se desplaza en un campo eléctrico de forma espontánea hacia zonas de menor potencial eléctrico, mientras que una carga negativa lo hace hacia zonas de mayor potencial eléctrico.

Ejercicio A5

a) Describa los tipos de desintegraciones radiactivas. (1'2 puntos)

La emisión radiactiva se divide en tres radiaciones de características distintas:

- Radiación alfa: está constituida por núcleos de helio ${}^4_2\text{He}$ (partículas α), que son emitidos por los átomos a una velocidad de unos 16 000 km/s. Es la radiación menos penetrante y puede frenarse con una cartulina o varias hojas de papel.

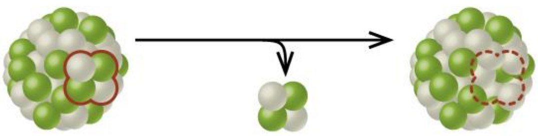
- Radiación beta: está formada por electrones (partículas β^-) o positrones (partículas β^+), emitidos por el núcleo a unos 260 000 km/s. La radiación beta atraviesa el papel, pero es retenida por una lámina metálica delgada (como una lámina de aluminio de algunos milímetros de espesor).

- Radiación gamma: es de naturaleza electromagnética, compuesta por fotones (partículas γ), por lo que no sufre desviación alguna al atravesar un campo eléctrico o magnético. Es la más penetrante de las tres, y son necesarias gruesas paredes de plomo u otros materiales pesados para retenerla.

Según las leyes de Rutherford–Soddy del desplazamiento o decaimiento radiactivo:

- Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula α, el elemento resultante se desplaza dos lugares a la izquierda en el sistema periódico, es decir, se transforma en otro cuyo número atómico es dos unidades menor y cuya masa es, aproximadamente, cuatro unidades de masa atómica menor:

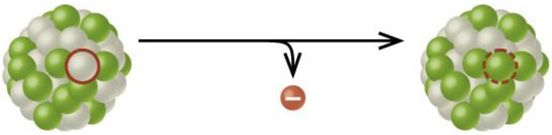
$${}^A_Z X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2\text{He}$$



Por ejemplo:

$${}^{210}_{84}\text{Po} \longrightarrow {}^{206}_{84}\text{Pb} + {}^4_2\text{He}$$

- Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula β^-, el elemento resultante se desplaza un lugar a la derecha en el sistema periódico, esto es, se transforma en otro cuyo número atómico es una unidad mayor y cuya masa es prácticamente idéntica:



$$^A_ZX \longrightarrow {}_{Z+1}^{\;\;A}Y + {}_{-1}^{\;\;0}e$$

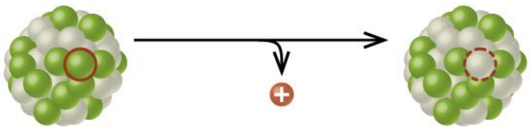
Por ejemplo:

$$^{131}_{\;\;53}\mathrm{I} \longrightarrow {}^{131}_{\;\;54}\mathrm{Xe} + {}_{-1}^{\;\;0}e$$

La desintegración β^- ocurre cuando un neutrón se transforma en un protón, con emisión de un electrón y un antineutrino electrónico:

$$^1_0n \longrightarrow {}^1_1p + {}_{-1}^{\;\;0}e + \bar{\nu}_e$$

- Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula β^+, el elemento resultante se desplaza un lugar a la izquierda en el sistema periódico, es decir, se transforma en otro con un número atómico una unidad menor, prácticamente con la misma masa:



$$^A_ZX \longrightarrow {}_{Z-1}^{\;\;A}Y + {}_{+1}^{\;\;0}e$$

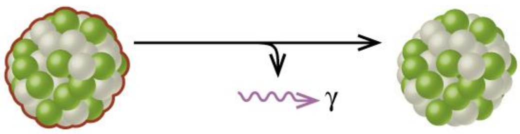
Por ejemplo:

$$^{15}_{\;8}\mathrm{O} \longrightarrow {}^{15}_{\;7}\mathrm{N} + {}_{+1}^{\;\;0}e$$

La desintegración β^+ ocurre cuando un protón se transforma en un neutrón, con emisión de un positrón y un neutrino electrónico:

$$^1_1p \longrightarrow {}^1_0n + {}_{+1}^{\;\;0}e + \nu_e$$

- Cuando un núcleo radiactivo excitado emite radiación gamma, se desexcita energéticamente, pero no sufre transmutación alguna:



$$^A_ZX^* \longrightarrow {}^A_ZX + {}^0_0\gamma$$

Por ejemplo:

$$^{60}_{27}\mathrm{Co}^* \longrightarrow {}^{60}_{27}\mathrm{Co} + \gamma$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Calcule la longitud de onda de De Broglie para una partícula de masa m y energía cinética E. Aplique el resultado obtenido a una partícula α ($m_\alpha = 4'0060$ u) para $E_\alpha = 250$ eV. (0'8 puntos)

Según la hipótesis de De Broglie, toda partícula material, de masa m, que se mueve con velocidad v, y que, por lo tanto, posee un momento lineal $p = m \cdot v$ (propiedad corpuscular), lleva una longitud de onda λ asociada (propiedad ondulatoria), dada por:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{p}$$

Donde h es la constante de Planck.

El momento lineal de la partícula se relaciona con su energía cinética E de la siguiente manera:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{m^2 \cdot v^2}{2 \cdot m} = \frac{p^2}{2 \cdot m} \longrightarrow p = \sqrt{2 \cdot m \cdot E}$$

Combinando ambas expresiones, se tiene:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot E}}$$

Para una partícula α:

$$m_\alpha = 4'0060\ \mathrm{u} \cdot \frac{1'66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} = 6'65 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

$$E = 250\ \mathrm{eV} \cdot \frac{1'60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{eV}} = 4'00 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{J}$$

$$\lambda = \frac{(6'63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})}{\sqrt{2 \cdot (6'65 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \cdot (4'00 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{J})}} \longrightarrow \boxed{\lambda = 9'09 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{m}}$$

Opción B

Ejercicio B1

a) Un satélite de masa 25 000 kg describe una órbita circular alrededor de un planeta cuya masa es $M_P = 6'0 \cdot 10^{27}$ kg. Siendo el periodo orbital de 326 horas, determine el radio de la órbita y la energía total del satélite. (1'2 puntos)

La fuerza de atracción gravitatoria que ejerce el planeta sobre el satélite está constantemente dirigida hacia el centro de la órbita que éste describe, es decir, se trata de una fuerza centrípeta, por lo que se ha de cumplir la siguiente igualdad:

$$F_g = F_c$$

Teniendo en cuenta la ley de la gravitación universal de Newton y la definición de fuerza centrípeta:

$$G \cdot \frac{M_P \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{r} \longrightarrow G \cdot \frac{M_P}{r} = v^2$$

Relacionando la velocidad orbital v con el periodo orbital T:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi \cdot r}{T} \longrightarrow \; G \cdot \frac{M_P}{r} = \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 \; \longrightarrow \; G \cdot \frac{M_P}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

De donde se deduce que el radio r de la órbita es:

$$r^3 = \frac{G \cdot M_P \cdot T^2}{4\pi^2} \longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_P \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(6'67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}) \cdot (6'0 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}) \cdot (326 \cdot 60 \cdot 60\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2}} \longrightarrow \boxed{r = 2'41 \cdot 10^9\ \mathrm{m}}$$

La energía total del satélite en esta órbita será la suma de sus energías cinéticas y potencial:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_P \cdot m_s}{r}$$

Recurriendo a la igualdad entre las fuerzas gravitatoria y centrípeta:

$$G \cdot \frac{M_P \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{r} \longrightarrow m_s \cdot v^2 = G \cdot \frac{M_P \cdot m_s}{r}$$

Trasladando esta expresión a la de la energía total, se obtiene:

$$E = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_P \cdot m_s}{r} - G \cdot \frac{M_P \cdot m_s}{r} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_P \cdot m_s}{r}$$

$$E = -\frac{1}{2} \cdot (6'67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}) \cdot \frac{(6'0 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}) \cdot (2'5 \cdot 10^4\ \mathrm{kg})}{(2'41 \cdot 10^9\ \mathrm{m})} \longrightarrow \boxed{E = -2'08 \cdot 10^{12}\ \mathrm{J}}$$

b) "La intensidad, en un punto dado, del campo gravitatorio de un planeta es proporcional a la masa del objeto que se coloque en ese punto". Razone si esta afirmación es cierta o falsa. (0'8 puntos)

Esta es una afirmación falsa. La intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto P se define como la fuerza $\vec{F}_g$ que actuaría sobre una unidad de masa m' situada en ese punto:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m'}$$

Si es un planeta el que crea el campo gravitatorio, la intensidad de campo gravitatorio en un punto del espacio exterior a él coincide con la intensidad de campo gravitatorio que crearía una partícula de su misma masa, considerada puntual, situada en su centro, por lo que puede determinarse aplicando la ley de la gravitación universal de Newton:

$$\vec{g} = \frac{-G \cdot \frac{M_P \cdot m'}{r^2} \cdot \vec{u}_r}{m'} = -G \cdot \frac{M_P}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

De modo que $\vec{g}$ depende de la masa que crea el campo (masa del planeta, M_P) y la distancia (r) de ésta al punto considerado, pero no de la masa del cuerpo que situamos en ese punto.

Ejercicio B2

Un teléfono móvil emite una onda electromagnética de frecuencia $6 \cdot 10^8$ Hz

a) ¿Cuáles son las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda? Determinar la frecuencia de esta onda sonora. Dato: $v_{\text{sonido}} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (1′4 puntos)

Una onda se propaga en un medio a una velocidad característica, dada por:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Por lo que la longitud de onda es directamente proporcional a la velocidad de propagación (depende del tipo de onda y del medio en el que se propaga) e inversamente proporcional a la frecuencia (que es la frecuencia de vibración del foco emisor):

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Así pues, teniendo en cuenta que las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío a una velocidad $c = 3'00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (que suponemos igual en el aire), para una onda de frecuencia $f = 6 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3'00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{6 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}} = 0'5 \text{ m}$$

En consecuencia, para que una onda sonora, que se propaga a unos 340 m/s en el aire, tenga la misma longitud de onda, debe tener una frecuencia f', dada por:

$$f' = \frac{v_{\text{sonido}}}{\lambda} = \frac{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0'5 \text{ m}} \longrightarrow \boxed{f' = 680 \text{ Hz}}$$

Una onda electromagnética de $6 \cdot 10^8$ Hz (o 600 MHz) pertenece a la región no visible del espectro de las radiofrecuencias, en concreto, al intervalo de las ondas de frecuencia ultra alta (UHF, *ultra high frequency*). Por su parte, una onda sonora de 680 Hz pertenece al espectro audible, es decir, a aquellas ondas mecánicas de frecuencia comprendida entre los 20 y los 20 000 Hz que, generalmente, pueden ser percibidas por el oído humano como un sonido.

b) La onda electromagnética choca con un obstáculo y vuelve al emisor $2 \cdot 10^{-5}$ s después de ser emitida. ¿Cuál es la distancia entre el obstáculo y el teléfono? (0′6 puntos)

Para calcular esta distancia tendremos en cuenta esta ecuación básica de la cinemática:

$$\text{espacio} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Sea d la distancia entre el emisor y el obstáculo, en el trayecto de ida y vuelta la onda recorre, por lo tanto, $2d$ metros. Y siendo $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la velocidad de la onda:

$$2d = c \cdot t$$

$$d = \frac{c \cdot t}{2} = \frac{(3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (2 \cdot 10^{-5} \text{ s})}{2}$$

$$\boxed{d = 3\,000 \text{ m}}$$

Ejercicio B3

a) **Un rayo incide en la superficie plana de separación de un medio y el aire con un ángulo de $\pi/6$ radianes, emergiendo el rayo refractado con un ángulo de $\pi/3$ radianes. Determinar la velocidad de la luz en el medio y el índice de refracción del mismo.** (1 punto)

La ley de Snel de la refracción determina la relación entre el ángulo de incidencia (θ_1) y el ángulo de refracción (θ_2):

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \cdot \operatorname{sen} \theta_2$$

Donde n_1 es el índice de refracción del medio de incidencia y n_2, el índice de refracción del medio de refracción.

Siendo $\theta_1 = \pi/6 \text{ rad} = 30°$ y $\theta_2 = \pi/3 \text{ rad} = 60°$, el ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción, lo cual ocurre cuando el rayo incide desde un medio de mayor índice de refracción (medio más refringente) y pasa a otro de menor índice de refracción (menos refringente) que, en este caso, es necesariamente el aire ($n_{aire} = 1$).

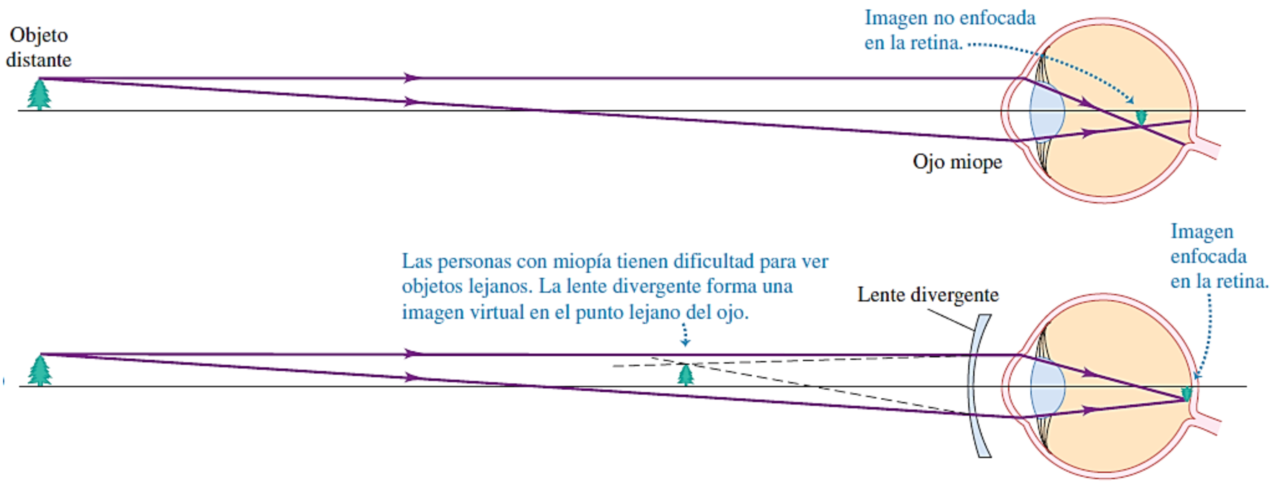
$$n_1 \cdot \operatorname{sen} 30° = n_{aire} \cdot \operatorname{sen} 60° \longrightarrow n_1 = n_{aire} \cdot \frac{\operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 30°} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} \longrightarrow \boxed{n_1 = \sqrt{3} \cong 1'73}$$

Por la definición de índice de refracción (cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio considerado):

$$n = \frac{c}{v} \longrightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{\sqrt{3}} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{3} \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cong 1'73 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

b) **¿En qué consiste la miopía? ¿Cómo se corrige? Utilice un dibujo que muestre la marcha de los rayos.** (1 punto)

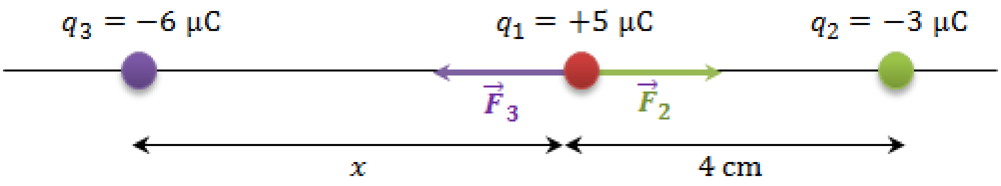
La miopía es un defecto de la visión debido a una deformación por alargamiento del globo ocular. En el ojo miope, los rayos provenientes de un objeto situado en el infinito se enfocan delante de la retina. El objeto más distante del cual se puede formar una imagen en la retina está entonces más próximo que el infinito. La consecuencia de esto es una visión borrosa de los objetos alejados. Este defecto puede corregirse mediante el uso de lentes divergentes:



Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio B4

a) **Una carga eléctrica de valor $q_1 = +5\ \mu\text{C}$ tiene a su derecha y a 4 cm una carga $q_2 = -3\ \mu\text{C}$. ¿A qué distancia a la izquierda de q_1 y en la recta que une q_1 y q_2 habrá que colocar una carga $q_3 = -6\ \mu\text{C}$ para que la fuerza neta sobre q_1 sea nula? ¿Y si q_1 valiera $-8\ \mu\text{C}$? Justifique el resultado.** (1 punto)



De acuerdo a la ley de Coulomb, la fuerza que ejerce la carga q_2 sobre la carga q_1 es:

$$\vec{F}_2 = K \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_{12}^2} \cdot \vec{\imath}$$

Y la fuerza que ejerce la carga q_3 sobre la carga q_1 es:

$$\vec{F}_3 = -K \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_{13}^2} \cdot \vec{\imath}$$

Por el principio de superposición, para que la fuerza resultante sobre q_1 sea nula:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = K \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_{12}^2} \cdot \vec{\imath} - K \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_{13}^2} \cdot \vec{\imath} = 0 \longrightarrow K \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r_{12}^2} = K \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{r_{13}^2}$$

La constante K y la carga q_1 se simplifican, y resulta:

$$\frac{|q_2|}{r_{12}^2} = \frac{|q_3|}{r_{13}^2} \longrightarrow \frac{3\ \mu\text{C}}{(0'04\ \text{m})^2} = \frac{6\ \mu\text{C}}{x^2}$$

Por lo que la distancia x a la que debe situarse la carga q_3 es:

$$x = \sqrt{(0'04\ \text{m})^2 \cdot \frac{6\ \mu\text{C}}{3\ \mu\text{C}}} \longrightarrow \boxed{x = 5'66 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 5'66\ \text{cm}}$$

Hemos comprobado cómo este resultado es independiente del valor de la carga q_1, por lo que si fuese de $-8\ \mu\text{C}$, en lugar de $+3\ \mu\text{C}$, la distancia a la que debería encontrarse la carga q_3 sería la misma.

b) **¿Es nulo el potencial electrostático en la posición de q_1? En caso negativo, calcule su valor.** (1 punto)

El potencial electrostático en un punto se calcula, de acuerdo al principio de superposición, mediante la suma de los potenciales que crean individualmente las cargas q_2 y q_3 en dicho punto:

$$V = V_2 + V_3 = K \cdot \frac{q_2}{r_{12}} + K \cdot \frac{q_3}{r_{13}} = (9'00 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \left[\frac{(-3 \cdot 10^{-6}\ \text{C})}{(0'04\ \text{m})} + \frac{(-6 \cdot 10^{-6}\ \text{C})}{(5'66 \cdot 10^{-2}\ \text{m})}\right]$$

$$\boxed{V = -1'63 \cdot 10^6\ \text{V} \longrightarrow V \neq 0}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio B5

a) Explique las principales características (intensidad, alcance y dependencia de la carga) de la interacción nuclear fuerte. (1′2 puntos)

En el modelo estándar de la física de partículas se distinguen cuatro interacciones fundamentales: la gravitatoria, la electromagnética, la nuclear débil y la nuclear fuerte.

Interacción	Intensidad relativa	Rango de acción	Partícula mediadora
Nuclear fuerte	1	Núcleo	Gluones
Nuclear débil	10^{-5}	Nucleón	Bosones W y Z
Electromagnética	10^{-2}	Infinito	Fotones
Gravitatoria	10^{-42}	Infinito	¿Gravitones?

La interacción nuclear fuerte es la más intensa de todas y es la responsable de la estabilidad nuclear, pues mantiene unidos los nucleones entre sí, con independencia de que sean protones o neutrones, lo que significa que es independiente de la carga eléctrica. Esta fuerza, que es siempre atractiva, está vinculada a una propiedad de los quarks denominada carga de color (de ahí que la disciplina de la que es objeto de estudio se denomine *cromodinámica* cuántica) y se produce mediante intercambio de unas partículas sin masa denominadas gluones (del inglés *glue*, pegamento). A pesar de su intensidad, la interacción nuclear es de muy corto alcance, del orden de 10^{-15} m, lo que justifica que la densidad de los núcleos sea constante e independiente del número de nucleones: la fuerza nuclear fuerte actúa entre un nucleón y sus vecinos, pero no con los nucleones más alejados pues, si esto fuera así, en los núcleos más pesados, las interacciones serían tan grandes que su densidad se vería necesariamente incrementada, algo que no ocurre.

b) Las masas de los isótopos $^{12}_{6}C$ y $^{13}_{6}C$ son, respectivamente, $12'00000$ u y $13'00335$ u. Determine cuál de los dos es el más estable. Datos: $m_p = 1'00728$ u; $m_n = 1'00867$ u. (0′8 punto)

La masa de un núcleo es menor que la suma de las masas de los nucleones que lo constituyen, si estos no estuviesen ligados. Este defecto de masa permite explicar la estabilidad de los núcleos, pues según la ecuación de Einstein:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

Donde ΔE representa la energía liberada en la formación del núcleo debido a la pérdida de masa Δm. Esta es la misma energía que habría que suministrar al núcleo para romperlo, por lo que se denomina energía de ligadura o enlace nuclear. Los núcleos de mayor tamaño se asocian con una mayor energía, pero este aumento no se produce de manera directamente proporcional al número de nucleones que contiene. Así pues, la medida de la estabilidad de un núcleo debe realizarse mediante la relación entre la energía de enlace y el número de nucleones que lo forman, es decir, mediante la energía de enlace por nucleón:

$$E_{\text{nucleón}} = \frac{\Delta E}{\text{Número de nucleones}} = \frac{\Delta E}{A}$$

Donde A es el número másico del núcleo.

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

En primer lugar calculamos los defectos de masa de los núcleos. Para el isótopo ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$:

$${}^{12}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow \begin{cases} A = 12 \\ Z = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 6 \text{ neutrones} \\ 6 \text{ protones} \end{cases}$$

$$\Delta m_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}} = 6 \cdot m_n + 6 \cdot m_p - m_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}} = 6 \cdot (1'00867 \text{ u}) + 6 \cdot (1'00728 \text{ u}) - (12'00000 \text{ u}) = 0'0957 \text{ u}$$

$$\text{Siendo } 1 \text{ u} = 1'66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \longrightarrow \Delta m_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}} = 1'59 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

Y para el ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$:

$${}^{13}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow \begin{cases} A = 13 \\ Z = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 7 \text{ neutrones} \\ 6 \text{ protones} \end{cases}$$

$$\Delta m_{{}^{13}_{6}\mathrm{C}} = 7 \cdot m_n + 6 \cdot m_p - m_{{}^{13}_{6}\mathrm{C}} = 7 \cdot (1'00867 \text{ u}) + 6 \cdot (1'00728 \text{ u}) - (13'00335 \text{ u}) = 0'10102 \text{ u}$$

$$\text{Siendo } 1 \text{ u} = 1'66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \longrightarrow \Delta m_{{}^{13}_{6}\mathrm{C}} = 1'68 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

La energía de enlace de cada núcleo se obtiene aplicando la ecuación de Einstein:

$$\Delta E_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}} = \Delta m_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}} \cdot c^2 = (1'59 \cdot 10^{-28} \text{ kg}) \cdot (3'00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \longrightarrow \boxed{\Delta E_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}} = 1'43 \cdot 10^{-11} \text{ J}}$$

$$\Delta E_{{}^{13}_{6}\mathrm{C}} = \Delta m_{{}^{13}_{6}\mathrm{C}} \cdot c^2 = (1'68 \cdot 10^{-28} \text{ kg}) \cdot (3'00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \longrightarrow \boxed{\Delta E_{{}^{13}_{6}\mathrm{C}} = 1'51 \cdot 10^{-11} \text{ J}}$$

Aunque la energía de enlace del ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ es mayor que la del ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, veremos cómo no ocurre lo mismo con la energía de enlace por nucleón:

$$E_{\text{nucleón}}({}^{12}_{6}\mathrm{C}) = \frac{\Delta E_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}}}{A_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}}} = \frac{1'43 \cdot 10^{-11} \text{ J}}{12} = 1'19 \cdot 10^{-12} \text{ J} \longrightarrow \boxed{E_{\text{nucleón}}({}^{12}_{6}\mathrm{C}) = 7'45 \text{ MeV}}$$

$$E_{\text{nucleón}}({}^{13}_{6}\mathrm{C}) = \frac{\Delta E_{{}^{13}_{6}\mathrm{C}}}{A_{{}^{13}_{6}\mathrm{C}}} = \frac{1'51 \cdot 10^{-11} \text{ J}}{13} = 1'16 \cdot 10^{-12} \text{ J} \longrightarrow \boxed{E_{\text{nucleón}}({}^{13}_{6}\mathrm{C}) = 7'26 \text{ MeV}}$$

En consecuencia el núcleo de ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ es más estable que el de ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$.

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com