Opción A

Ejercicio A1

a) Discutir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz $M = \begin{pmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcular M^{-1} para $a = 0$. (1'5 puntos)

Para que exista inversa de una matriz, su determinante no puede ser nulo:

$$|M| = \begin{vmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-a-1) - 10 \cdot a = 5 \cdot a + 5 - 10 \cdot a = -5 \cdot a + 5 \neq 0 \longrightarrow \boxed{a \neq 1}$$

Es decir:

$$\boxed{\exists\, M^{-1}\ \forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\}}$$

Y la matriz inversa M^{-1} se puede calcular de la siguiente manera:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot Adj(M^t)$$

Cuando $a = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow |M| = 5,$$

$$M^t = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(M^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz M^{-1} para $a = 0$ resulta:

$$M^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Si B es una matriz cuadrada de orden 3 y $|B| = -5$, calcular $|2 \cdot B^t|$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B. (1 punto)

Recordemos que el determinante de una matriz coincide con el determinante de su traspuesta:

$$|B| = |B^t|$$

Además, al multiplicar una matriz por un número, cada elemento queda multiplicado por ese número. Esto tiene como consecuencia que el determinante queda multiplicado n veces por ese número, donde n indica el orden de la matriz correspondiente.

Por lo tanto:

$$|2 \cdot B^t| = 2^3 \cdot |B^t| = 8 \cdot |B| = 8 \cdot (-5) \longrightarrow \boxed{|2 \cdot B^t| = -40}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A2

a) Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido, que el vector $\vec{v} = (2, 1, -2)$. (1 punto)

En primer lugar, calculamos el vector unitario del vector $\vec{v}$:

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2, 1, -2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{(2, 1, -2)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Este vector tiene módulo unidad, y la misma dirección y sentido que $\vec{v}$. Como se pide un vector que tenga módulo 4 y la misma dirección, pero sentido opuesto, que el vector $\vec{v}$, tenemos que multiplicar a $\vec{u}_v$ por -4:

$$\boxed{\left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)}$$

b) Calcular un punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ cuya distancia al punto $A = (-1, 2, 0)$ sea mínima. (1'5 puntos)

La recta r nos resultará más útil escrita en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

Pues el punto que buscamos, que llamaremos P, tendrá la forma:

$$P(1 - \lambda, -2 + \lambda, 3 - 2\lambda)$$

Dado que la distancia desde $A(-1, 2, 0)$ hasta P es la menor posible, el vector $\overrightarrow{AP}$ será perpendicular a la recta o, lo que es lo mismo, perpendicular al vector director de la recta, $\vec{v}(-1, 1, -2)$. Esto significa que el producto escalar $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}$ debe ser nulo. Teniendo esto en cuenta:

$$\overrightarrow{AP} = (2 - \lambda, -4 + \lambda, 3 - 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = -1 \cdot (2 - \lambda) + 1 \cdot (-4 + \lambda) - 2 \cdot (3 - 2\lambda) = -2 + \lambda - 4 + \lambda - 6 + 4\lambda = -12 + 60$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = -12 + 6\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 2$$

Es decir, el punto buscado es aquel para el que $\lambda = 2$:

$$\boxed{P(-1, 0, -1)}$$

<u>Estrategia de resolución alternativa</u>:

Se determina el plano π perpendicular a r que pasa por A. Siendo el vector director de la recta $\vec{v}$ un vector normal al plano:

$$\vec{n}(-1, 1, -2) \longrightarrow \pi \equiv -x + y - 2z + D = 0$$

El plano ha de pasar por el punto $A(-1,2,0)$, por lo que sustituyéndolo en la expresión del plano se deduce el valor que ha de tener D para que se satisfaga esa condición:

$$-(-1)+2-2\cdot 0+D=0 \longrightarrow D=-3$$

Por tanto, la ecuación del plano queda:

$$\pi \equiv\ -x+y-2z-3=0$$

El punto P buscado es la intersección del plano π con la recta $r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}$. Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$-(1-\lambda)+(-2+\lambda)-2\cdot(3-2\lambda)-3=0$$

$$-1+\lambda-2+\lambda-6+4\lambda-3=0$$

$$-12+6\lambda=0 \longrightarrow \lambda=2$$

Siendo $\lambda=2$, el punto P resulta, finalmente:

$$P(1-\lambda,-2+\lambda,3-2\lambda) \longrightarrow \boxed{P(-1,0,-1)}$$

<u>Estrategia de resolución alternativa</u>:

Sabiendo que la recta pasa por el punto $P_0(1,-2,3)$ y que su vector director es $\vec{v}(-1,1,-2)$, podemos calcular la distancia de la recta al punto $A(-1,2,0)$, mediante la fórmula:

$$d(A,r)=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0A}\right|}{|\vec{v}|}$$

Siendo $\overrightarrow{P_0A}=(-2,4,-3)$:

$$\vec{v}\times\overrightarrow{P_0A}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}=(-3+8)\cdot\vec{\imath}-(3-4)\cdot\vec{\jmath}+(-4+2)\cdot\vec{k} \longrightarrow (5,1,-2)$$

$$d(A,r)=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0A}\right|}{|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{5^2+1^2+(-2)^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}$$

Esta es la distancia del punto A al punto P buscado, es decir, coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AP}$. Si el punto P tiene la forma $(1-\lambda,-2+\lambda,3-2\lambda)$:

$$\overrightarrow{AP}=(2-\lambda,-4+\lambda,3-2\lambda)$$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{(2-\lambda)^2+(-4+\lambda)^2+(3-2\lambda)^2}=\sqrt{5}$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene que $\lambda=2$, por lo que el punto P resulta:

$$\boxed{P(-1,0,-1)}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A3

a) Calcular a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto $(1, 1)$ de su gráfica y, sin embargo, no tenga un extremo relativo en dicho punto. (1'25 puntos)

En este tipo de problemas, debemos encontrar en el enunciado las pistas suficientes como para llegar a tantas ecuaciones como incógnitas hay.

La primera información que tenemos de la función es que pasa por el punto $(1, 1)$:

$$f(1) = 1 \longrightarrow 1 + a + b + c = 1 \Longrightarrow a + b + c = 0 \ \text{[ecuación 1]}$$

También sabemos que la pendiente de $(1, 1)$ es nula, es decir, la recta tangente en $x = 1$ es horizontal, por lo que la primera derivada en ese punto es cero:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \longrightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \Longrightarrow 2a + b = -3 \ \text{[ecuación 2]}$$

Además, nos dicen que en ese punto no hay un máximo (en cuyo caso, habría de ser $f''(1) < 0$) ni un mínimo (por lo que tampoco se cumple que $f''(1) > 0$). En consecuencia, $f''(1) = 0$:

$$f''(x) = 6x + 2a \longrightarrow f''(1) = 6 + 2a = 0 \longrightarrow 2a = -6 \longrightarrow \boxed{a = -3} \ \text{[ecuación 3]}$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2:

$$2 \cdot (-3) + b = -3 \longrightarrow \boxed{b = 3}$$

Sustituyendo los valores de a y b en la ecuación 1:

$$-3 + 3 + c = 0 \longrightarrow \boxed{c = 0}$$

Así pues, la función dada es:

$$\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x}$$

b) Probar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real positiva. (1'25 puntos)

La función $f(x) = x^5 + x - 1$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

En primer lugar, demostraremos que existe, al menos, una raíz, es decir, un punto donde la función corta al eje de las x. Recurriremos al teorema de Bolzano:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ es continua en } [a, \mathrm{b}] \\ \text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \end{array}\right\} \longrightarrow \exists\, c \in (a, b) / f(c) = 0$$

Para ello, debemos encontrar un intervalo en el que la función cambie de signo. Por ejemplo:

$$f(-1) = -3, \qquad f(1) = 1$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ es continua en } [-1, 1] \\ \text{signo } f(-1) \neq \text{signo } f(1) \end{array}\right\} \longrightarrow \exists\, c \in (-1, 1) / f(c) = 0$$

Así que podemos asegurar que hay una solución en el intervalo $[-1, 1]$.

Ahora bien, se nos pide demostrar que esta solución es única. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists\, s \neq c / f(s) = 0$:

$$\text{Si } s < c, \text{por el teorema de Rolle} \longrightarrow \left.\begin{array}{c} f(x) \text{ es continua en } [s,c] \\ f(x) \text{ es derivable en } (s,c) \\ f(s) = f(c) \end{array}\right\} \longrightarrow \exists\, r \in (s,c) / f'(r) = 0$$

Si esto fuera cierto, debería existir algún punto en el que su primera derivada sea nula. Si estudiamos su derivada:

$$\text{Siendo } f'(x) = 5x^4 + 1 \;\longrightarrow\; f'(x) > 0, \;\; \forall\, x$$

No puede existir ningún r cuya derivada sea nula, como debería ocurrir de ser ciertas las hipótesis del teorema de Rolle. Se llega a un absurdo, una contradicción que invalida el supuesto del que partimos. La misma demostración se puede hacer si suponemos que $s > c$. En definitiva, no existe ningún s que anule la función, y la única solución que existe es la que se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio A4

a) Calcular: (1 punto)

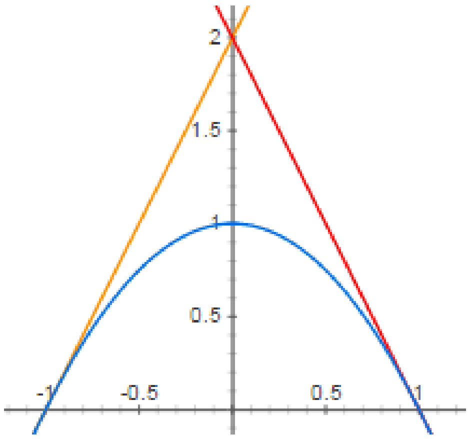
$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x \cdot e^x} \right]$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{e^x}{e^x + e^x + x \cdot e^x} \right] = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$. (1'5 puntos)

Determinamos las rectas tangentes a la gráfica en $x = 1$ y $x = -1$:



$$f(x) = 1 - x^2, \qquad f(1) = 0, \qquad f(-1) = 0$$

$$f'(x) = -2x, \qquad f'(1) = -2, \qquad f'(-1) = 2$$

$$\text{Tangente en } (1, 0) \longrightarrow y - 0 = -2 \cdot (x - 1) \longrightarrow y = -2x + 2$$

$$\text{Tangente en } (-1, 0) \longrightarrow y - 0 = 2 \cdot (x + 1) \longrightarrow y = 2x + 2$$

Teniendo esto en cuenta, el área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{0} [(2x + 2) - (1 - x^2)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [(-2x + 2) - (1 - x^2)] \cdot dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1) \cdot dx + \int_{0}^{1} (x^2 - 2x + 1) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{0}^{1}$$

$$= \left[0 - \left(\frac{-1}{3} + 1 - 1 \right) \right] + \left[\left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) - 0 \right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u}^2}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Opción B

Ejercicio B1

a) Discutir, según el valor del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+mz=2 \\ x+my+z=2m \\ x+y-mz=0 \end{cases}$

(1'5 puntos)

Recurriremos al teorema de Rouché–Frobenius para discutir el número de soluciones de este sistema. Así que comenzaremos por definir la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}, \qquad M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & 2m \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación evaluamos el rango de M, en función de los valores de m para los que $|M|=0$:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+1+m-m^2-1+m=-2m^2+2m$$

$$\text{Si } |M|=0 \longrightarrow -2m^2+2m=0 \longrightarrow m\cdot(-2m+2)=0 \longrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$$

Así pues, si $m\neq 0$ o $m\neq 1$, el rango de M es 3. Si $m=0$ o $m=1$, el rango de M es 2, pues siempre existe al menos un determinante de orden 2 no nulo en ella. Por tanto:

- Si $m\neq 0$ y $m\neq 1$:

  En este caso, $ran(M)=ran(M^*)=3$, que coincide con el número de incógnitas:

$$\boxed{\text{Si } m\neq 0 \text{ y } m\neq 1 \longrightarrow \text{ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO}}$$

- Si $m=0$:

  En este caso, el $ran(M)=2$, pero $ran(M^*)=3$, pues podemos encontrar algún determinante de orden tres no nulo en ella:

$$M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$$

$$\boxed{\text{Si } m=0 \longrightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}}$$

- Si $m=1$:

  En este caso, $ran(M)=ran(M^*)=2$, pues en la matriz M^* hay dos filas iguales:

$$M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Si } m=1 \longrightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Resolverlo para $m = 1$. (1 punto)

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1 \to F_3]{F_2-F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y=\lambda \\ -2z=-2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=2-y-z \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}$$

Por lo que las soluciones a este sistema compatible indeterminado son:

$$\boxed{\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}}$$

Ejercicio B2

Consideremos las rectas:

$$\boldsymbol{r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}, \qquad s = \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z}$$

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan. (1 punto)

Obtenemos las ecuaciones implícitas de r:

$$x = 2y, \qquad 2y = z-1, \qquad r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ 2y-z=-1 \end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones implícitas de s:

$$x = 2z, \qquad y-1 = 3z, \qquad s \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y-3z=1 \end{cases}$$

Sea la matriz M de los coeficientes y la matriz ampliada M^*, evaluamos sus rangos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4+2 = -2 \neq 0 \longrightarrow ran\ (M) = 3$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow |M^*| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4+6-2+2 = 6 \neq 0 \longrightarrow ran\ (M^*) = 4$$

Siendo $ran\ (M) = 3 \neq ran\ (M^*) = 4$, <u>las rectas se cruzan en el espacio sin cortarse</u>.

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s. (1′5 puntos)

Expresamos las rectas r y s en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{Punto } P(0,0,1) \\ \text{Vector } \overrightarrow{OP}(0,0,1) \\ \text{Vector } \vec{u}(2,1,2) \end{cases}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{Punto } Q(0,1,0) \\ \text{Vector } \overrightarrow{OQ}(0,1,0) \\ \text{Vector } \vec{v}(2,3,1) \end{cases}$$

Determinamos el plano π_1 que contiene a la recta r, al vector $\overrightarrow{OP}(0,0,1)$ y al punto $(0,0,0)$, y el plano π_2 que contiene a la recta s, al vector $\overrightarrow{OQ}(0,1,0)$ y al punto $(0,0,0)$:

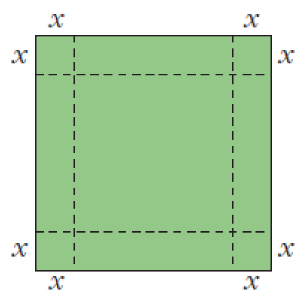
$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y = 0, \qquad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + 2z = 0$$

La recta buscada es la intersección de π_1 y π_2:

$$\boxed{\text{Recta } \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}} \longrightarrow \boxed{\text{Recta } \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}}$$

Ejercicio B3

Tenemos un cartón cuadrado de 6 cm de lado y queremos construir con él una caja sin tapa. Para ello recortamos un cuadrado de x cm de lado en cada vértice del cartón. Calcular x para que el volumen de la caja sea máximo. (2′5 puntos)



La caja tiene de base un cuadrado de lado $6 - 2x$ y su altura es x, por lo que su volumen se expresa:

$$V = (6 - 2x)^2 \cdot x = (36 - 24x + 4x^2) \cdot x = 36x - 24x^2 + 4x^3$$

Optimizamos la función:

$$V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x \longrightarrow V'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12 \cdot (x^2 - 4x + 3)$$

$$V'(x) = 0 \longrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \longrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

La solución $x = 3$ no es aceptable, pues supondría recortar completamente el cartón (matemáticamente corresponde a un mínimo). Si $x = 1$ la función alcanza un máximo, como se puede comprobar evaluando el signo de la segunda derivada en este punto:

$$V''(x) = 24x - 48 \longrightarrow V''(1) = 24 - 48 = -24 < 0 \longrightarrow \text{Máximo}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio B4

a) Calcular: (1 punto)

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + x^2\right)^{1/x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + x^2)^{1/x} = [1^\infty] \longrightarrow \lim_{x \to 0^+} (1 + x^2)^{1/x} = L \longrightarrow \ln\left[\lim_{x \to 0^+} (1 + x^2)^{1/x}\right] = \ln L$$

$$\ln\left[\lim_{x \to 0^+} (1 + x^2)^{1/x}\right] = \lim_{x \to 0^+} \left[\ln(1 + x^2)^{1/x}\right] = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1 + x^2)\right] = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\ln(1 + x^2)}{x}\right]$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{2x}{1 + x^2}}{1}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) = 0$$

$$\ln\left[\lim_{x \to 0^+} (1 + x^2)^{1/x}\right] = \ln L = 0 \longrightarrow L = e^0 = \boxed{1}$$

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje OX y la recta $x = 3$. (1′5 puntos)

Calculamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX:

$$\ln x = 0 \longrightarrow x = 1$$

Por lo que debemos calcular el área comprendida bajo la gráfica en el intervalo $[1, 3]$:

$$A = \int_1^3 \ln x \cdot dx$$

Calculamos la integral indefinida por partes:

$$u = \ln x\,, \qquad du = \frac{1}{x} \cdot dx, \qquad dv = dx, \qquad v = x$$

$$\int \ln x \cdot dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x \cdot x - \int dx = x \cdot \ln x - x$$

Por lo que el área buscada es:

$$A = \int_1^3 \ln x \cdot dx = [x \cdot \ln x - x]_1^3 = (3 \ln 3 - 3) - (\ln 1 - 1) = \boxed{3 \ln 3 - 2 \text{ u}^2}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com