FÍSICA: PAU 2016 JUNIO CASTILLA Y LEÓN

CONSTANTES FÍSICAS	
Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre	$g = 9'80\ \text{m/s}^2$
Carga elemental	$e = 1'60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$
Constante de gravitación universal	$G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Constante de Planck	$h = 6'63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$
Constante eléctrica en el vacío	$K = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9'00 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$
Electronvoltio	$1\ \text{eV} = 1'60 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$
Masa de la Tierra	$M_T = 5'98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9'11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2$
Radio de la Tierra	$R_T = 6'37 \cdot 10^6\ \text{m}$
Unidad de masa atómica	$1\ \text{u} = 1'66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3'00 \cdot 10^8\ \text{m/s}$

Opción A

Ejercicio A1

a) ¿A qué se llama velocidad de escape? ¿Cómo se calcula? (1 punto)

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debe comunicarse a un cuerpo para que salga del campo gravitatorio al que está sometido. Es así, por ejemplo, el caso de los satélites que se ponen en órbita alrededor de la Tierra, a los que hay que suministrarles la energía cinética suficiente para que puedan escapar del influjo gravitatorio terrestre y no caigan hacia la superficie durante su puesta en órbita. En consecuencia, la fuerza que habrá que suministrarles habrá de ser, como mínimo, igual y de sentido contrario a la fuerza gravitatoria:

$$F = -F_{\text{gravitatoria}} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Por lo que el trabajo necesario será:

$$W = \int_{R_T}^{\infty} F \cdot dr = \int_{R_T}^{\infty} G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \cdot dr = G \cdot M_T \cdot m \cdot \int_{R_T}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_T}^{\infty} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

Siendo este trabajo el que proporciona la energía cinética mínima necesaria:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}}$$

Esta es la velocidad de escape que necesita un cuerpo para escapar del campo gravitatorio terrestre. Como se puede observar, es independiente de la masa del cuerpo y solo depende de la masa y el radio de la Tierra (o de los de otro cuerpo celeste, si fuera el caso), por lo que su valor es $11'2\ \text{km/s}$.

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Mediante observaciones astronómicas se ha descubierto recientemente un planeta extrasolar (Gliese 581b) orbitando en torno a una estrella de la clase de las enanas rojas. La órbita es circular, tiene un radio de $6'076$ millones de kilómetros y un periodo de rotación orbital de $5'368$ días. Determine la masa de la estrella. (1 punto)

La fuerza gravitatoria que mantiene en órbita al planeta en torno a su estrella es una fuerza centrípeta y, en consecuencia, debe cumplirse la siguiente igualdad:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \longrightarrow G \cdot \frac{M}{r} = v^2$$

Donde M es la masa de la estrella, r el radio de la órbita y v la velocidad a la que se mueve el planeta en su órbita. Esta velocidad es un dato desconocido, pero puede relacionarse con el periodo orbital T de la siguiente manera:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Relacionando ambas expresiones y despejando M se tiene:

$$G \cdot \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} \longrightarrow M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

Al sustituir los valores conocidos obtenemos, finalmente, la masa de la estrella:

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot (6'076 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{(6'67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \cdot (5'368 \text{ días} \cdot 24 \text{ h/día} \cdot 60 \text{ min/h} \cdot 60 \text{ s/min})^2}$$

$$\boxed{M = 6'17 \cdot 10^{29} \text{ kg}}$$

Es decir, es una estrella con una masa $0'31 \cdot M_{\odot}$ (siendo $M_{\odot}$ la masa del Sol).

Ejercicio A2

La ecuación de una onda armónica unidimensional transversal es $y(x,t) = 0'06 \cdot \text{sen}(20\pi t - 4\pi x + \pi/2)$, donde todas las magnitudes están expresadas en unidades SI.

a) Explique los términos “armónica”, “unidimensional” y “transversal” y calcule la velocidad de la onda. (1'2 puntos)

Una onda es una perturbación que se propaga en el espacio y en el tiempo, por lo que se puede definir mediante una función matemática ψ que dependa de estas variables:

$$\psi = f(x, y, z, t)$$

Una <u>onda armónica</u> es aquella que puede describirse mediante una función de onda sinusoidal (seno o coseno). Las ondas armónicas tienen una serie de parámetros constantes que las caracterizan y que aparecen implícitamente en la expresión matemática que las define, cuya forma general es:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Donde $\vec{k}$ representa el vector número de ondas y ω, la frecuencia angular o pulsación.

Una onda unidimensional es aquella que se propaga en una dirección del espacio. Cuando se trata de una onda armónica que se desplaza a lo largo del eje X, la ecuación de onda suele escribirse así:

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

Esta ecuación es análoga a la que ofrece el enunciado:

$$y(x,t) = 0'06 \cdot \text{sen}(20\pi \cdot t - 4\pi \cdot x + \pi/2)$$

En este caso, la magnitud que se emplea para medir la perturbación es la posición de la partícula que vibra respecto a su posición de equilibrio. Esta magnitud se denomina elongación y su valor máximo es la amplitud, que es una característica de la onda. Si la dirección de la vibración es perpendicular a la dirección de propagación, se dice que la onda es transversal.

La velocidad v a la que se propaga (avanza) una onda es característica del medio. Teniendo en cuenta que la velocidad será igual al desplazamiento efectuado por la onda en la unidad de tiempo, podemos relacionarla con dos magnitudes propias de la onda, su periodo T y su longitud de onda λ:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

A su vez, la longitud de onda se relaciona con el número de ondas k:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Igualmente, el periodo se relaciona con la frecuencia angular:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

De modo que la velocidad de la onda puede calcularse a partir de k y ω:

$$v = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k}$$

Dado que ω es lo que multiplica a t en la ecuación de onda y k, lo que multiplica a x:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 20\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ k &= 4\pi \text{ m}^{-1} \end{aligned}\right\} \longrightarrow v = \frac{20\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{4\pi \text{ m}^{-1}} \longrightarrow \boxed{v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

b) Escriba la ecuación del movimiento de un punto situado en $x = 0'25$ m. ¿Cuál es la velocidad máxima a la que se mueve dicho punto? (0'8 puntos)

Para un punto situado en $x = 0'25$ m, la elongación es una función del tiempo:

$$y(t) = 0'06 \cdot \text{sen}(20\pi \cdot t - 4\pi \cdot 0'25 + \pi/2) \longrightarrow \boxed{y(t) = 0'06 \cdot \text{sen}(20\pi \cdot t - \pi/2)}$$

La velocidad a la que vibra este punto se obtiene al derivar la expresión de la elongación anterior:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d[0'06 \cdot \text{sen}(20\pi \cdot t - \pi/2)]}{dt} = 0'06 \cdot 20\pi \cdot \cos(20\pi \cdot t - \pi/2)$$

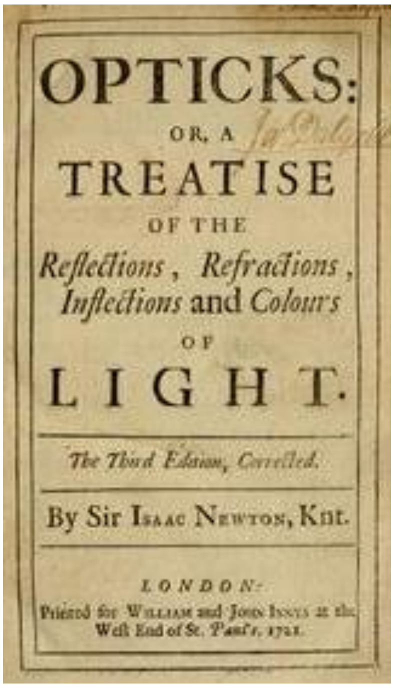
$$\boxed{v = 1'2 \cdot \pi \cdot \cos(20\pi \cdot t - \pi/2)}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A3

a) Explique la controversia histórica sobre la naturaleza de la luz. (1 punto)

Christian Huygens propuso, en su *Tratado de la Luz*, publicado en 1678, que la luz era una onda, igual que el sonido o las ondas en la superficie del agua. Esta idea también fue defendida por Robert Hooke, lo que le llevó a enfrentarse con el gran Isaac Newton, que era partidario de un modelo corpuscular de la luz, como se recoge en su tratado *Opticks*, de 1704. Para Newton la luz estaba formada por minúsculas partículas que avanzan a través de un medio gracias a la propia inercia de su movimiento, lo cual podía explicar fenómenos como las sombras de los cuerpos, la reflexión o la refracción, bajo el supuesto de que su velocidad aumentaba al pasar de un medio a otro de mayor densidad.



La relevancia de la figura de Newton hizo que su teoría corpuscular de la luz dominase el panorama científico hasta que, unos cien años después, en 1801, Thomas Young demostrase que la luz tenía un comportamiento ondulatorio, ya que su famoso experimento de la doble rendija mostraba cómo el fenómeno de interferencia, propio de las ondas, también lo experimentaba la luz.

En los años posteriores, otros muchos científicos, como Augustin Fresnel, realizaron experiencias que respaldaban la teoría ondulatoria de la luz, y determinaron, cada vez con más precisión, su velocidad de propagación. En 1849, el parisino Hippolyte Fizau había atrapado un rayo de luz en un laberinto de espejos y, armado con un delicado mecanismo, logró medir su velocidad en el aire, obteniendo un valor de unos 315 000 000 m/s, que su compatriota Foucault afinó hasta los 298 000 000 m/s. El golpe definitivo a la teoría corpuscular vino cuando se observó que su velocidad disminuía al pasar de un medio a otro de mayor densidad, lo que contradecía las explicaciones de Newton.

A lo largo del siglo XIX se realizaron grandes avances en el conocimiento de los campos eléctricos y magnéticos, que culminaron en 1865 cuando el físico James Maxwell unificó los fenómenos eléctricos y magnéticos en una única teoría electromagnética. De ellas se desprendía que las perturbaciones del campo electromagnético se propagaban a una velocidad constante, próxima a los 300 000 000 m/s.

$$c = \sqrt{1/\mu_0 \varepsilon_0}$$

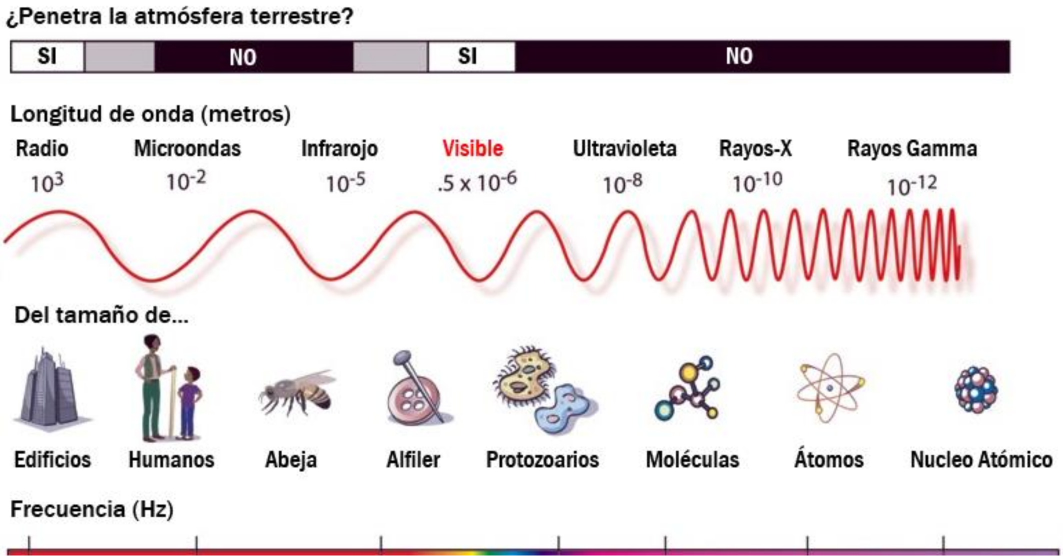
Este valor era sospechosamente cercano al de las mediciones que se habían hecho de la velocidad de la luz. Ante tan asombrosa coincidencia, Maxwell se atrevió a anunciar: *la velocidad se aproxima tanto a la de la luz que, según parece, existen poderosas razones para concluir que la propia luz es una perturbación electromagnética que se propaga en forma de ondas a través del campo electromagnético, de acuerdo con las leyes electromagnéticas*.

Todas las ondas se pueden describir mediante una expresión llamada ecuación de onda. A partir de las ecuaciones de la teoría electromagnética de Maxwell es posible obtener una ecuación de onda, análoga a la que describe las ondas sonoras, por lo que es posible deducir que la luz es una onda electromagnética, ya que se produce por la propagación de una perturbación de un campo eléctrico y un campo magnético simultáneos y perpendiculares entre sí.

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Las ondas electromagnéticas son ondas transversales, ya que las perturbaciones son perpendiculares a su dirección de propagación. Además, los campos eléctrico y magnético están en fase, es decir, ambos alcanzan su valor máximo (o mínimo) simultáneamente. A diferencia de las ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas no requieren un medio material para su propagación. Por eso, la luz del Sol llega a la Tierra después de recorrer una gran distancia en el vacío.

Las ondas electromagnéticas que acabamos de definir se caracterizan por los mismos parámetros que las demás ondas: la amplitud, el periodo, la frecuencia y la longitud de onda. Cuando hablamos de luz, en general, hacemos referencia a aquellas ondas electromagnéticas que somos capaces de percibir. Al igual que existe un rango de sonidos audibles, la luz visible se corresponde con las ondas electro–magnéticas que son capaces de estimular la retina, y son aquellas que tienen una longitud de onda comprendida entre 400 y 700 nm, aproximadamente. En realidad, existen muchísimas radiaciones electromagnéticas, no visibles, que en conjunto forman el espectro electromagnético:



A principios del siglo xx se creía que poco se podía añadir al conocimiento acumulado sobre la teoría electromagnética de la radiación, pero nuevos fenómenos descubiertos resucitan ideas que se creían desplazadas. Entre ellos, destaca el efecto fotoeléctrico, que no podía explicarse mediante la teoría ondulatoria y que necesitó de nuevos planteamientos: la luz está formada por pequeños paquetes de energía, denominados cuantos o fotones, que poseen una energía múltiplo de una cantidad mínima que se conoce como constante de Planck:

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot f$$

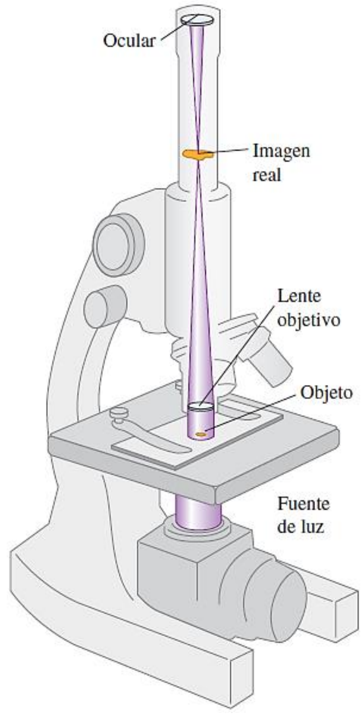
Con este supuesto, Einstein consiguió explicar de manera satisfactoria el efecto fotoeléctrico, pero eso llevaba consigo asumir que la luz, aun siendo una radiación, o sea, una onda electromagnética, tiene también una naturaleza discreta, es decir, corpuscular.

Así, la naturaleza de la luz se entiende actualmente como una combinación de ambas: existe una dualidad ondulatoria y corpuscular en el comportamiento de la luz. Cuando se propaga e interacciona consigo misma se comporta como una onda, pero cuando lo hace con la materia, se comporta como partícula. Esta síntesis fue obra del físico francés Louis de Broglie, abriendo el camino a una nueva disciplina: la Mecánica ondulatoria, que fue desarrollada posteriormente por E. Schrödinger.

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

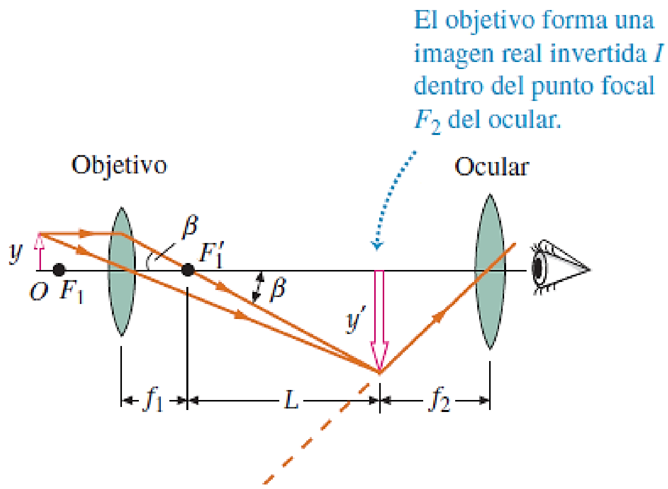
b) Explique el funcionamiento de un microscopio. Para ello, utilice un diagrama que muestre la marcha de los rayos en este instrumento. (1 punto)

Cuando, para observar un objeto, se necesitan aumentos mayores de los que son posibles mediante una lupa simple, el instrumento que se usa normalmente es el microscopio óptico, también conocido como microscopio compuesto.



El objeto O que va a ser observado se sitúa a una distancia ligeramente superior a la distancia focal f_1 del objetivo, que se trata de una lente convergente que forma una imagen I, real, aumentada e invertida del objeto. La lente más próxima al ojo, que se denomina ocular, se utiliza como lupa simple para observar la imagen formada por el objetivo. El ocular se coloca de forma tal que la imagen formada por el objetivo se localiza en el primer punto focal del ocular, y forma una imagen virtual I' de I. La luz emerge así del ocular en forma de haz paralelo, como si procediese de un punto situado a una gran distancia, por delante de la lente. La distancia entre el segundo punto focal del objetivo y el primer punto focal del ocular recibe el nombre de longitud del tubo, L.

El siguiente diagrama recoge la marcha de los rayos en el microscopio:



El poder amplificador del microscopio compuesto es el producto de dos factores. El primero de ellos es el aumento lateral m_1 del objetivo, el cual determina el tamaño lineal de la imagen real I; el segundo factor es el aumento angular M_2 del ocular, el cual relaciona el tamaño angular de la imagen virtual vista a través del ocular con el tamaño angular que la imagen real I tendría si se la viera sin el ocular.

$$\text{Siendo } \tan\beta = \frac{y}{f_1} = \frac{-y'}{L} \longrightarrow m_1 = \frac{y'}{y} = \frac{-L\cdot\tan\beta}{f_1\cdot\tan\beta} = -\frac{L}{f_1} \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{s_{pp}}{f_2}$$

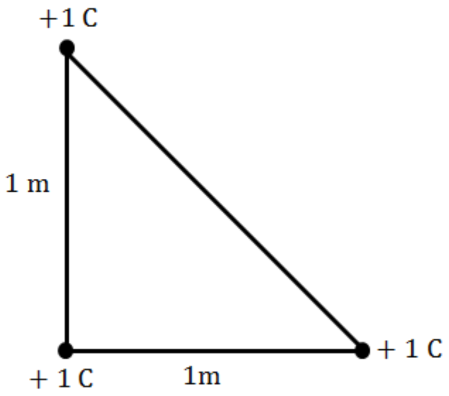
$$M_{tot} = -\frac{L\cdot s_{pp}}{f_1\cdot f_2}$$

Donde s_{pp} es el punto próximo del observador (distancia mínima a la que el ojo es capaz de enfocar con nitidez una imagen) que, en promedio, es 25 cm (depende de la persona y su edad).

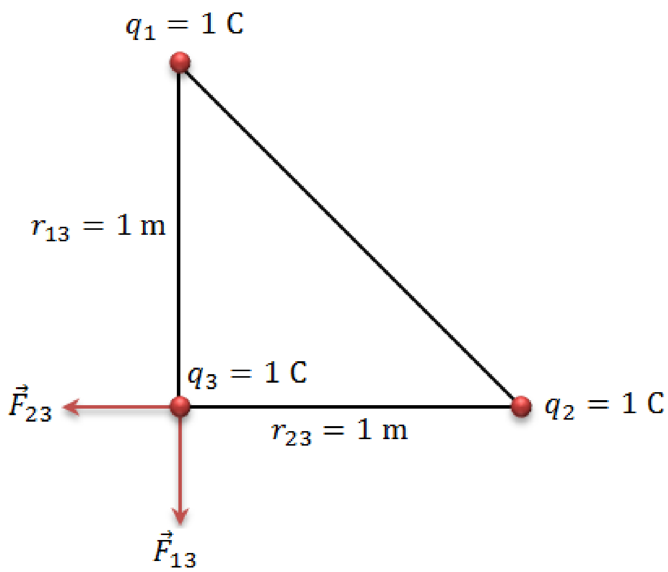
Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A4

Tres cargas puntuales de +1 C se encuentran en las esquinas de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura.



a) Calcule el módulo de la fuerza que actúa sobre la carga situada en el vértice del ángulo recto. (1'2 puntos)



Aplicando la ley de Coulomb, las fuerzas que ejercen las cargas q_1 y q_2 sobre q_3 son, respectivamente:

$$\vec{F}_{13} = -K \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}^2} \cdot \vec{j}, \qquad \vec{F}_{23} = -K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}^2} \cdot \vec{i}$$

Siendo $q_1 = q_2 = q_3 = q = 1$ C y $r_{13} = r_{23} = r = 1$ m, por el principio de superposición de las fuerzas:

$$\vec{F} = -K \cdot \frac{q^2}{r^2} \cdot \vec{i} - K \cdot \frac{q^2}{r^2} \cdot \vec{j} = -(9'00 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1 \text{ C})^2}{(1 \text{ m})^2} \cdot \vec{i} - (9'00 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1 \text{ C})^2}{(1 \text{ m})^2} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F} = -9'00 \cdot 10^9 \cdot \vec{i} - 9'00 \cdot 10^9 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Por lo que el módulo de la fuerza es:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(-9'00 \cdot 10^9)^2 + (-9'00 \cdot 10^9)^2} \text{ N} \longrightarrow \boxed{|\vec{F}| = 9'00 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \text{ N}}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la hipotenusa. (0'8 puntos)

El potencial eléctrico en un punto es la suma de los potenciales eléctricos creados por cada una de las cargas:

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i = K \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{r_i}$$

El punto medio de la hipotenusa equidista de las cargas q_1, q_2 y q_3. Siendo la longitud de la hipotenusa $h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ m, la distancia r a la que se encuentran las cargas de ese punto es:

$$r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{m}$$

En consecuencia, siendo $q_1 = q_2 = q_3 = q = 1$ C:

$$V = K \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right) = K \cdot \left(\frac{q}{r} + \frac{q}{r} + \frac{q}{r}\right) = 3 \cdot K \cdot \frac{q}{r} = 3 \cdot (9'00 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1\ \text{C})}{(\sqrt{2}/2\ \text{m})}$$

$$\boxed{V = 27\sqrt{2} \cdot 10^9\ \text{N}}$$

Ejercicio A5

La frecuencia umbral de la plata para el efecto fotoeléctrico es $1'142 \cdot 10^{15}$ Hz.

a) Calcule el trabajo de extracción para este metal. Exprese el resultado en eV. (1 punto)

El trabajo de extracción es una magnitud característica de cada metal que indica la energía mínima que debe transportar un fotón para que se produzca efecto fotoeléctrico cuando este choca contra su superficie. La energía E de este fotón se relaciona con su frecuencia f mediante la fórmula de Planck:

$$E = h \cdot f$$

Así pues, el fotón debe tener una frecuencia que, al menos, proporcione la energía que corresponde al trabajo de extracción. A esta frecuencia mínima se la denomina frecuencia umbral, f_0, y conociendo su valor para un determinado metal, es posible calcular el trabajo de extracción del mismo, W_0 o E_0:

$$E_0 = h \cdot f_0 = (6'63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}) \cdot (1'142 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}) = 7'57 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Siendo 1 eV $= 1'60 \cdot 10^{-19}$ J:

$$\boxed{E_0 = 4'73\ \text{eV}}$$

b) Si se ilumina una superficie de plata con luz de 200 nm, ¿se producirá efecto fotoeléctrico? En caso afirmativo, calcule la velocidad de los electrones emitidos. (1 punto)

Para saber si se produce efecto fotoeléctrico habrá que comprobar si la frecuencia de la luz supera la frecuencia umbral:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{200 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 1'5 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1} \Longrightarrow \boxed{f > f_0 \longrightarrow \text{Sí se produce efecto fotoeléctrico}}$$

Según la interpretación del efecto fotoeléctrico de Einstein, la energía en exceso del fotón queda en el electrón en forma de energía cinética:

$$E_{\text{fotón}} = E_0 + E_c \longrightarrow h \cdot f = h \cdot f_0 + E_c$$

$$E_c = h \cdot (f - f_0) = (6'63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}) \cdot (1'5 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1} - 1'142 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}) = 2'37 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Recordando la expresión para la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2'37 \cdot 10^{-19}\ \text{J})}{9'11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}$$

Por lo que la velocidad máxima que pueden adquirir los electrones, suponiendo que no hay pérdidas energéticas durante el proceso:

$$\boxed{v = 7'2 \cdot 10^5\ \text{m/s}}$$

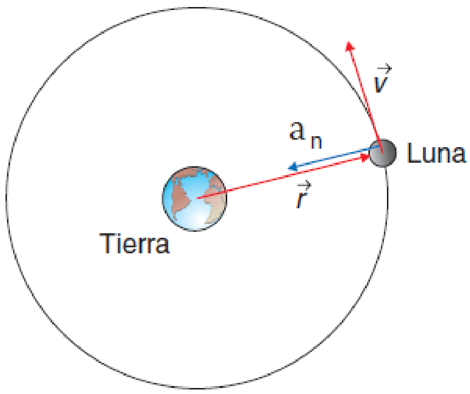
Opción B

Ejercicio B1

La Luna se mueve alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular de radio $3'84 \cdot 10^8$ m y periodo $27'32$ días.

a) Calcule la velocidad y la aceleración de la Luna respecto a la Tierra y realice un esquema de la trayectoria en el que se muestren ambos vectores. (1 punto)

La Luna gira alrededor de la Tierra debido a la fuerza de atracción gravitatoria que esta ejerce sobre el satélite y que, suponiendo una órbita circular, está constantemente dirigida hacia el centro de su trayectoria. Se trata, por tanto, de una fuerza normal o centrípeta, por lo que se ha de cumplir:



$$\vec{F}_g = \vec{F}_n \longrightarrow -G \cdot \frac{M_T \cdot m_L}{r^2} \cdot \vec{u}_r = m_L \cdot \vec{a}_n$$

Por lo que la Luna está sometida a una aceleración normal, perpendicular a la trayectoria y, por tanto, a la velocidad en cada instante, que es igual a:

$$\vec{a}_n = -G \cdot \frac{M_T}{r^2} \cdot \vec{u}_r = -(6'67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \cdot \frac{(5'98 \cdot 10^{24}\ \text{kg})}{(3'84 \cdot 10^8\ \text{m})^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$\boxed{a_n = -2'7 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{u}_r\ \text{N/kg}}$$

De la expresión para el módulo de la aceleración normal, podemos obtener la velocidad de la Luna:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \longrightarrow v = \sqrt{a_n \cdot r} = \sqrt{(2'7 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2) \cdot (3'84 \cdot 10^8\ \text{m})} \longrightarrow \boxed{v = 1\,019'2\ \text{m/s}}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

También se podría obtener la velocidad de la Luna a partir del dato de su periodo orbital:

$$T = 27'32 \text{ días} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 2'36 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$\text{Siendo } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ y } v = \omega \cdot r \longrightarrow v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2\pi \cdot (3'84 \cdot 10^8 \text{ m})}{2'36 \cdot 10^6 \text{ s}} \longrightarrow \boxed{v = 1\,022'2 \text{ m/s}}$$

De esta manera, utilizaríamos el dato de la velocidad para calcular la aceleración:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(1\,022'2 \text{ m/s})^2}{3'84 \cdot 10^8 \text{ m}} \longrightarrow \boxed{a_n = 2'7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2}$$

b) Si desde la superficie terrestre se lanza un objeto verticalmente con una velocidad inicial igual a la mitad de su velocidad de escape, ¿qué altura máxima alcanzará sin tener en cuenta el efecto de la atmósfera? (1 punto)

La velocidad de escape se define como la velocidad mínima con la que debe lanzarse un objeto para que supere los efectos del campo gravitatorio. Para que esto sea posible la energía cinética que hay que suministrarle al cuerpo debe ser, al menos, igual a al valor de la energía potencial en la superficie terrestre:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} \longrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}$$

Si la velocidad con la que se lanza el cuerpo es $v = v_e/2$:

$$v = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}}{2} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T}}$$

Lógicamente, esta velocidad es insuficiente para escapar del campo gravitatorio terrestre. Para saber la altura máxima que alcanzará, aplicaremos el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_p(\text{inicial}) + E_c(\text{inicial}) = E_p(\text{final}) + \underbrace{E_c(\text{final})}_{0}$$

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h}$$

Sustituyendo la expresión obtenida para v:

$$-G \cdot \frac{M_T}{R_T} + \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T}}\right)^2 = -G \cdot \frac{M_T}{R_T + h} \longrightarrow \frac{-G \cdot M_T}{R_T} + \frac{G \cdot M_T}{4 \cdot R_T} = \frac{-G \cdot M_T}{R_T + h} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{-1}{R_T} + \frac{1}{4 \cdot R_T} = \frac{-1}{R_T + h} \longrightarrow \frac{-3}{4 \cdot R_T} = \frac{-1}{R_T + h} \longrightarrow R_T + h = \frac{4}{3} \cdot R_T \longrightarrow h = \frac{4}{3} \cdot R_T - R_T$$

$$h = \frac{1}{3} \cdot R_T = \frac{1}{3} \cdot (6'37 \cdot 10^6 \text{ m}) \longrightarrow \boxed{h = 2'123 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio B2

Un extremo de una cuerda larga se somete a un movimiento armónico simple de frecuencia 3′5 Hz, lo que genera una perturbación ondulatoria que tarda 3 s en llegar a un punto de la cuerda situado a 7 m de dicho extremo. Determine:

a) La longitud de onda del movimiento ondulatorio. (1 punto)

La onda tarda 3 s en alcanzar un punto situado a 7 m, por lo que su velocidad de propagación es:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{7}{3}\ \mathrm{m/s}$$

La velocidad se puede relacionar con dos magnitudes características de la onda, el periodo, T, y la longitud de onda, λ:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Siendo el periodo el inverso de la frecuencia, f:

$$T = \frac{1}{f} \longrightarrow v = \lambda \cdot f$$

Por lo que, conociendo $f = 3'5$ Hz y $v = 7/3$ m/s, la longitud de onda resulta:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{7/3\ \mathrm{m/s}}{7/2\ \mathrm{s^{-1}}} \longrightarrow \boxed{\lambda = 2/3\ \mathrm{m}}$$

b) La diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda que distan 7 m ente sí. (1 punto)

La expresión general de la onda es:

$$y(x,t) = A \cdot \mathrm{sen}(kx - \omega t + \varphi_0)$$

Donde $\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$ es la fase de la onda, que depende de las coordenadas x y t. Los valores de k y ω se calculan de la siguiente manera:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2/3\ \mathrm{m}} = 3\pi\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot (7/2\ \mathrm{s^{-1}}) = 7\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

Así, la fase de la onda resulta:

$$\varphi = 3\pi \cdot x - 7\pi \cdot t + \varphi_0$$

Por lo que la diferencia de fase entre dos puntos x_1 y x_2 separados 7 m, en un mismo instante t es:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (3\pi \cdot x_2 - 7\pi \cdot t + \varphi_0) - (3\pi \cdot x_1 - 7\pi \cdot t + \varphi_0) = 3\pi \cdot x_2 - 3\pi \cdot x_1 = 3\pi \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = 7\ \mathrm{m} \longrightarrow \boxed{\Delta\varphi = 3\pi\ \mathrm{rad}}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio B3

a) Un rayo que atraviesa un medio con índice de refracción n_1 incide en un medio con índice de refracción n_2. ¿Puede producirse el fenómeno de reflexión total siendo $n_1 < n_2$? Razone su respuesta. (1 punto)

La reflexión total interna se produce únicamente cuando un rayo de luz pasa de un medio de mayor índice de refracción a otro de menor índice de refracción, es decir, cuando $n_1 > n_2$. Esto se justifica mediante la ley de Snel:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \longrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}$$

Si $n_1 > n_2$, el ángulo de refracción, θ_2, es mayor que el de incidencia, θ_1:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} > 1 \longrightarrow \operatorname{sen}\theta_2 > \operatorname{sen}\theta_1 \longrightarrow \theta_2 > \theta_1$$

Al ir aumentando el ángulo de incidencia el ángulo de refracción también aumenta. En el límite, hay un ángulo, llamado ángulo crítico, para el cual el ángulo de incidencia es 90°. A partir de ese valor del ángulo crítico ya no se produce refracción, y tiene lugar el fenómeno de la reflexión total interna:

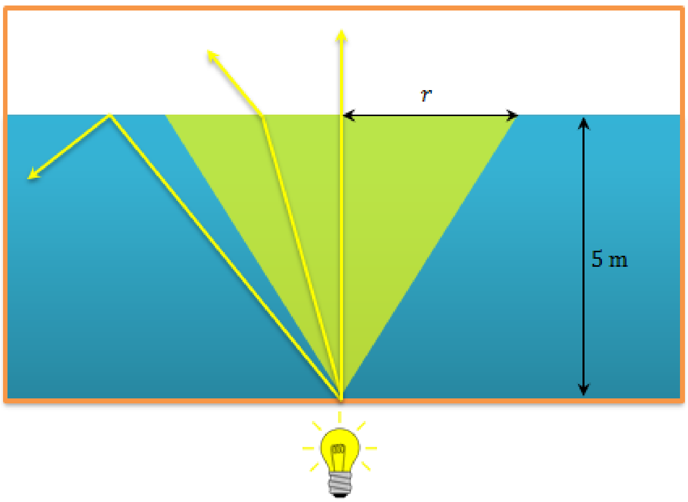
$$n_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_c = n_2 \cdot \operatorname{sen}90° \longrightarrow \operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Lógicamente, no podría ocurrir la reflexión total interna cuando $n_1 < n_2$, pues en este caso:

$$\text{Si } n_1 < n_2 \longrightarrow \operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} > 1$$

Lo cual es imposible, pues el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que 1. Cuando el rayo pasa de un medio de menor índice de refracción a otro de mayor índice de refracción, el ángulo de refracción siempre disminuye, y se produce refracción para cualquier ángulo de incidencia.

b) Un foco luminoso puntual está situado 5 m por debajo de la superficie de un estanque de agua ($n_{agua} = 1'33$). Halle el área del mayor círculo en la superficie del estanque a través del cual puede emerger directamente la luz que emite el foco. (1 punto)



Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Al pasar la luz del agua al aire, puede producirse reflexión total interna, si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico:

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1}{1'33} \longrightarrow \theta_c = 48'75°$$

Todos los rayos que incidan con un ángulo mayor, no saldrán del agua, por lo que los únicos que se pueden ver desde el exterior son aquellos que inciden en el interior de un cono que en la superficie forma un círculo de radio r, tal como se muestra en la imagen. Siendo la profundidad del estanque de 5 m, el valor de r se puede calcular aplicando trigonometría:

$$\tan 48'75° = \frac{r}{5\text{ m}} \longrightarrow r = 5'70\text{ m}$$

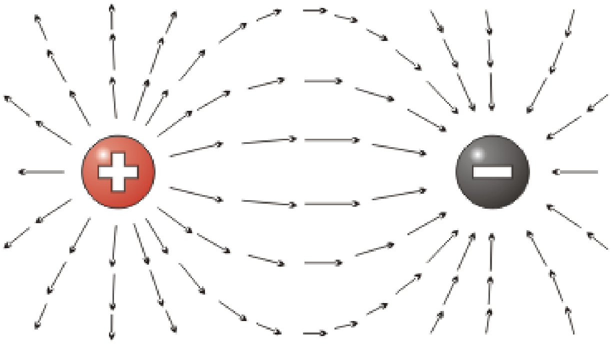
Por lo que la superficie del círculo máximo a través del cual puede salir la luz es:

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot (5'70\text{ m})^2 \longrightarrow \boxed{S = 102'1\text{ m}^2}$$

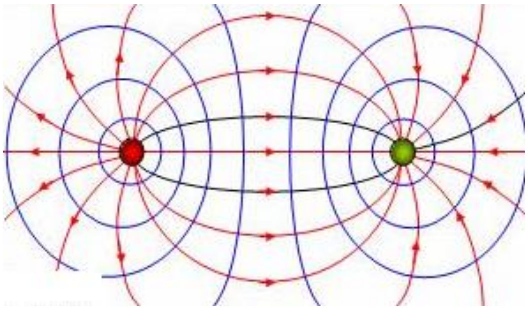
Ejercicio B4

a) Haga un dibujo que muestre las líneas del campo eléctrico y las equipotenciales para un sistema de dos cargas puntuales de igual módulo y signos opuestos, separadas una distancia *d*. (1 punto)

Las líneas de campo eléctrico son siempre tangentes al vector campo eléctrico $\vec{E}$ en cada punto, y se orientan de tal modo que su sentido coincide con el de la fuerza que actuaría sobre una carga testigo positiva. Así pues, las cargas positivas actúan como *fuentes de campo*, ya que las líneas de campo salen de ellas, y las cargas positivas se consideran *sumideros de campo*, pues las líneas de campo se dirigen hacia ellas. Para un dipolo como el descrito, el campo eléctrico se representaría de este modo:



Las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a $\vec{E}$ y unen los puntos que se encuentran sometidos al mismo potencial. En nuestro caso:



Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) ¿Pueden cruzarse las líneas de campo eléctrico? ¿Y las del campo magnético? Justifique sus respuestas. (1 punto)

Tanto en el campo eléctrico como en el magnético, las líneas de campo nunca pueden cortarse, pues cada punto del espacio se caracteriza por un único vector $\vec{E}$ (en el campo eléctrico) o $\vec{B}$ (en el campo magnético), de modo que la presencia de dos líneas de campo en un punto, implicaría la coexistencia de dos valores distintos para la intensidad de campo, lo cual no es posible.

Ejercicio B5

a) Defina energía de enlace por nucleón y explique brevemente cómo varía en función del número másico. (1 punto)

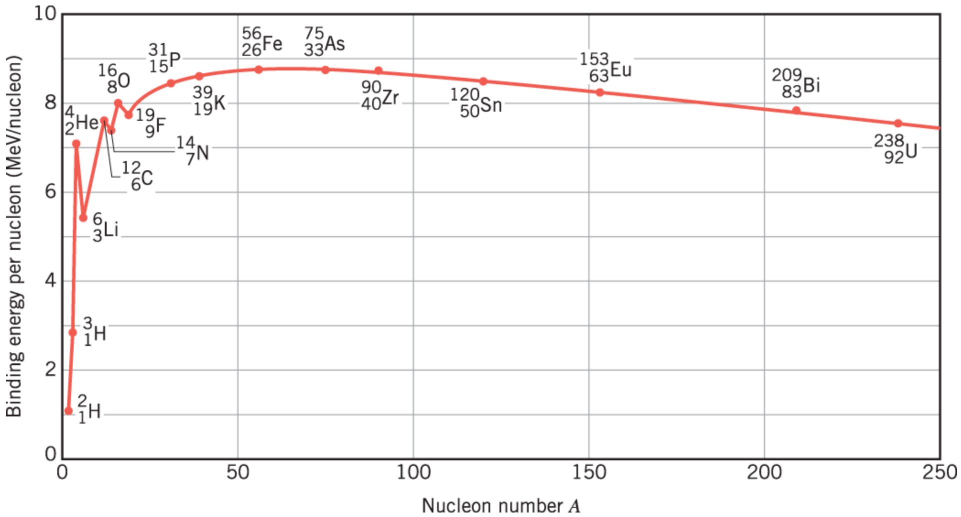
La masa de un núcleo es menor que la suma de las masas de los nucleones (protones y neutrones) que lo constituyen, si estos no estuviesen ligados. Este defecto de masa permite explicar la estabilidad de los núcleos, pues de acuerdo a la ecuación de Einstein:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

Donde ΔE representa la energía liberada en la formación del núcleo debido a la pérdida de masa Δm. Esta es la misma energía que habría que suministrar al núcleo para romperlo, por lo que se denomina energía de ligadura o enlace nuclear. Los núcleos de mayor tamaño se asocian con una mayor energía, pero este aumento no se produce de manera directamente proporcional al número de nucleones que contiene. Así pues, la medida de la estabilidad de un núcleo debe realizarse mediante la relación entre la energía de enlace y el número de nucleones que lo forman, es decir, mediante la energía de enlace por nucleón:

$$E_{\text{nucleón}} = \frac{\Delta E}{\text{Número de nucleones}} = \frac{\Delta E}{A} \quad \text{(siendo } A \text{ el número másico del núcleo)}$$

La energía de enlace por nucleón va aumentando según se incrementa el número másico del núcleo, al menos en los elementos químicos que aparecen en la primera mitad de la tabla periódica. La energía de enlace por nucleón es máxima en los átomos situados en torno al hierro, lo que significa que estos núcleos poseen una mayor estabilidad relativa. Al seguir aumentando el número atómico, se produce un descenso en la energía de enlace por nucleón, y cuando el número de nucleones es muy elevado, el núcleo se vuelve inestable y se desintegra con facilidad (desintegraciones α y β).



Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Calcule la energía de enlace de los núcleos $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ y $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ y razone cuál de ellos es más estable.
Datos: $\boldsymbol{m_{\mathrm{Pb}} = 207'976\,636\ \mathrm{u}}$; $\boldsymbol{m_{\mathrm{Fe}} = 55'934\,942\ \mathrm{u}}$; $\boldsymbol{m_p = 1'007\,277\ \mathrm{u}}$; $\boldsymbol{m_n = 1'008\,665\ \mathrm{u}}$.
(1 punto)

En primer lugar calculamos los defectos de masa de los núcleos. Para el $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$:

$$^{208}_{82}\mathrm{Pb} \longrightarrow \begin{cases} A = 208 \longrightarrow 126 \text{ neutrones} \\ Z = 82 \longrightarrow 82 \text{ protones} \end{cases}$$

$$\Delta m_{\mathrm{Pb}} = 126 \cdot m_n + 82 \cdot m_p - m_{\mathrm{Pb}} = 126 \cdot (1'008\,665\ \mathrm{u}) + 82 \cdot (1'007\,277\ \mathrm{u}) - (207'976\,636\ \mathrm{u})$$
$$= 1'711\,868\ \mathrm{u}$$

$$\text{Siendo } 1\ \mathrm{u} = 1'66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \longrightarrow \Delta m_{\mathrm{Pb}} = 2'84 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

Y para el $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$:

$$^{56}_{26}\mathrm{Fe} \longrightarrow \begin{cases} A = 56 \longrightarrow 30 \text{ neutrones} \\ Z = 26 \longrightarrow 26 \text{ protones} \end{cases}$$

$$\Delta m_{\mathrm{Fe}} = 30 \cdot m_n + 26 \cdot m_p - m_{\mathrm{Fe}} = 30 \cdot (1'008\,665\ \mathrm{u}) + 26 \cdot (1'007\,277\ \mathrm{u}) - (55'934\,942\ \mathrm{u})$$
$$= 0'514\,210\ \mathrm{u}$$

$$\text{Siendo } 1\ \mathrm{u} = 1'66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \longrightarrow \Delta m_{\mathrm{Fe}} = 8'54 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{kg}$$

La energía de enlace de cada núcleo se obtiene aplicando la ecuación de Einstein:

$$\Delta E_{\mathrm{Pb}} = \Delta m_{\mathrm{Pb}} \cdot c^2 = (2'84 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \cdot (3'00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2 \longrightarrow \boxed{\Delta E_{\mathrm{Pb}} = 2'556 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J}}$$

$$\Delta E_{\mathrm{Fe}} = \Delta m_{\mathrm{Fe}} \cdot c^2 = (8'54 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{kg}) \cdot (3'00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2 \longrightarrow \boxed{\Delta E_{\mathrm{Fe}} = 7'686 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}}$$

Aunque la energía de enlace del plomo es mayor que la del hierro, veremos cómo no ocurre lo mismo con la energía de enlace por nucleón:

$$E_{\text{nucleón}}(\mathrm{Pb}) = \frac{\Delta E_{\mathrm{Pb}}}{A_{\mathrm{Pb}}} = \frac{2'556 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J}}{208} = 1'23 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} \longrightarrow \boxed{E_{\text{nucleón}}(\mathrm{Pb}) = 7'68\ \mathrm{MeV}}$$

$$E_{\text{nucleón}}(\mathrm{Fe}) = \frac{\Delta E_{\mathrm{Fe}}}{A_{\mathrm{Fe}}} = \frac{7'686 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}}{56} = 1'37 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} \longrightarrow \boxed{E_{\text{nucleón}}(\mathrm{Fe}) = 8'57\ \mathrm{MeV}}$$

En consecuencia el núcleo de hierro es más estable que el de plomo.

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com