Opción A

Ejercicio A1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$**, se pide:**

a) Hallar los valores de m para que la matriz A^{10} tenga inversa. (1'25 puntos)

La condición para que una matriz tenga inversa es que su determinante no sea nulo:

$$|A^{10}| = |A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A| = |A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A| = |A|^{10} \neq 0$$

Así pues, para que la matriz A^{10} tenga inversa, tiene que cumplirse que $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2)\cdot(m+1)\cdot(m-1) \neq 0 \longrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\exists\ (A^{10})^{-1}\ \forall\ m, \text{tal que } m \in \mathbb{R} - \{-2,-1,1\}}$$

b) Para $m = 0$, calcular, si es posible, la matriz inversa de A. (1'25 puntos)

La matriz inversa de A es igual a:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}(A^t)$$

Teniendo en cuenta que, para $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad |A| = -2, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz A^{-1} es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio A2

a) Calcular la recta que corta perpendicularmente al eje OZ y que pasa por el punto $P = (1,2,3)$. (1'25 puntos)

El eje OZ es una recta que pasa por el punto $O = (0,0,0)$ y cuyo vector director es el vector unitario $\vec{u}_z = (0,0,1)$. Si definimos un punto genérico del eje OZ, $Q = (0,0,\lambda)$, el vector director de la recta r que buscamos tendrá la forma $\vec{v} = \overrightarrow{QP} = (1,2,3-\lambda)$.

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

La condición de que la recta r sea perpendicular al eje OZ implica que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}_z$ también han de ser perpendiculares, por lo tanto:

$$\vec{v} \perp \vec{u}_z \longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}_z = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_z = (1, 2, 3 - \lambda) \cdot (0, 0, 1) = 3 - \lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 3$$

Entonces, cuando $\lambda = 3$ el vector director de la recta r resulta ser $\vec{v} = (1, 2, 0)$. Como sabemos que la recta pasa por $P = (1, 2, 3)$, su ecuación queda:

$$\boxed{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0} \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 3 \end{cases}}$$

b) Estudiar, en función del parámetro $\boldsymbol{a}$, la posición relativa de la recta $\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}}$ y el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x + y + az = 1}$. (1'25 puntos)

El estudio de la posición relativa de la recta r y el plano π se puede hacer atendiendo a las posiciones relativas de sus vectores director y normal, respectivamente.

— La recta y el plano serán paralelos si el vector director de la recta y el vector normal al plano son perpendiculares.

— La recta y el plano serán coincidentes si el vector director de la recta y el vector normal al plano son perpendiculares y si, además, comprobamos que un punto cualquiera de la recta pertenece al plano.

— La recta y el plano se cortarán en un punto en cualquier otro caso.

La recta r, definida como la intersección del plano $x = 0$ (plano YZ) y el plano $y = 0$ (plano XZ), es la recta que corresponde al eje OZ, cuyo vector director es el vector unitario $\vec{u}_z = (0, 0, 1)$[1]. Por su parte, el vector normal al plano π es $\vec{n} = (1, 1, a)$.

Para que $\vec{u}_z$ y $\vec{n}$ sean perpendiculares, $\vec{u}_z \cdot \vec{n} = 0$:

$$\vec{u}_z \cdot \vec{n} = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, a) = 0 \longrightarrow \boxed{a = 0 \longrightarrow r \text{ y } \pi \text{ son paralelos}}$$

La recta no es coincidente pues, por ejemplo, el punto $(0, 0, 0)$ de la recta no pertenece al plano:

$$0 + 0 + a \cdot 0 \neq 1$$

Para cualquier otro valor de a la recta y el plano se cortarán en un punto:

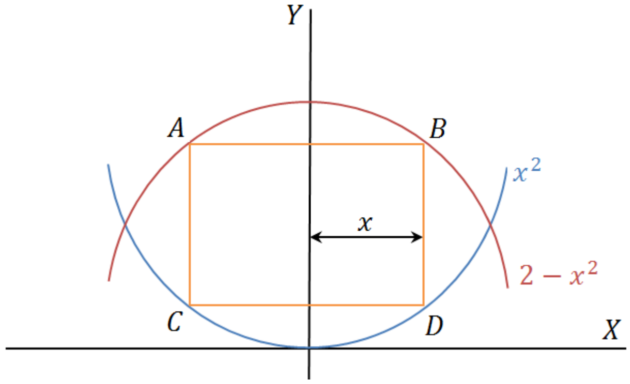
$$\boxed{a \neq 0 \longrightarrow r \text{ y } \pi \text{ se cortan}}$$

Si se diese el caso de que $\vec{u}_z$ y $\vec{n}$ fuesen paralelos, la recta y el plano se cortarían perpendicularmente. Para que esto ocurra, tendría que ser $\vec{u}_z \times \vec{n} = 0$. Se puede comprobar que este producto vectorial no se anula (sea cual sea a), por lo que la recta y el plano nunca forman un ángulo de 90°.

[1] En realidad, podríamos utilizar como vector director del eje OZ cualquier vector de la forma $\vec{v} = (0, 0, \lambda)$.

Ejercicio A3

Determinar los vértices del rectángulo de área máxima que tiene lados paralelos a los ejes de coordenadas y vértices en el borde del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2 - x^2$. (2'5 puntos)



Las dos parábolas son simétricas respecto del eje de ordenadas, por lo que los puntos A y C son simé–tricos de los puntos B y C, respectivamente. Los cuatro puntos son los vértices del rectángulo $ABCD$, cuya área tenemos que optimizar.

Las coordenadas de los puntos A, B, C y D son:

$$A(-x, 2 - x^2), \qquad B(x, 2 - x^2), \qquad C(-x, x^2), \qquad D(x, x^2)$$

De modo que las longitudes de los lados del rectángulo pueden expresarse como las distancias entre los vértices de la siguiente manera:

$$\text{Base del rectángulo} \longrightarrow \overline{AB} = \overline{CD} = 2x$$

$$\text{Altura del rectángulo} \longrightarrow \overline{AC} = \overline{BD} = 2 - 2x^2$$

Por lo tanto, el área del rectángulo es:

$$A = 2x \cdot (2 - 2x^2) = 4x - 4x^3$$

Optimizamos la función:

$$A(x) = 4x - 4x^3 \longrightarrow A'(x) = 4 - 12x^2$$

$$A'(x) = 0 \longrightarrow 4 - 12x^2 = 0 \longrightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Evaluamos el signo de la segunda derivada:

$$A''(x) = -24x$$

La función alcanza un máximo cuando $x = \sqrt{3}/3$. Para este valor, las coordenadas de los vértices son:

$$\boxed{A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{3}\right), \qquad B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{3}\right), \qquad C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A4

a) Sea $g(x)$ una función continua y derivable en toda la recta real tal que $g(0) = 0$ y $g(2) = 2$. Probar que existe algún punto c del intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$. (1 punto)

La función $g(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, de modo que también lo es en el intervalo $(0, 2)$ y satisface las hipótesis del teorema del valor medio (o de Lagrange).

$$\left.\begin{array}{r} g(x) \text{ es continua en } [0,2] \\ g(x) \text{ es derivable } (0,2) \end{array}\right\} \longrightarrow \exists\, c \in (0,2) / g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0}$$

Siendo $g(0) = 0$ y $g(2) = 2$:

$$g'(c) = \frac{2 - 0}{2 - 0} \longrightarrow \boxed{g'(c) = 1}$$

b) Hallar la función $f(x)$ que cumple $f'(x) = x \cdot \ln\left(x^2 + 1\right)$ y $f(0) = 1$. (1'5 puntos)

$$\int x \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot dx$$

Para resolver esta integral, realizamos la sustitución:

$$t = x^2 + 1, \qquad dt = 2x \cdot dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\int x \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot dx = \frac{1}{2} \int \ln t \cdot dt$$

La integral que se obtiene puede resolverse por partes:

$$u = \ln t\,, \qquad du = \frac{1}{t} \cdot dt, \qquad dv = dt, \qquad v = t$$

$$\frac{1}{2} \int \ln t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln t \cdot t - \int t \cdot \frac{1}{t} \cdot dt\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(t \cdot \ln t - \int dt\right) = \frac{1}{2} \cdot (t \cdot \ln t - t) = \frac{t}{2} \cdot (\ln t - 1)$$

Deshaciendo el cambio, resulta, finalmente:

$$f(x) = \int x \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot dx = \frac{x^2 + 1}{2} \cdot [\ln(x^2 + 1) - 1] + C$$

Sabiendo que $f(0) = 1$:

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot (\ln 1 - 1) + C = 1 \longrightarrow -\frac{1}{2} + C = 1 \longrightarrow C = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Por tanto:

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \cdot [\ln(x^2 + 1) - 1] + \frac{3}{2}}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Opción B

Ejercicio B1

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \boldsymbol{x + my = -1} \\ \boldsymbol{(1-2m)x - y = m} \end{cases}$**, se pide:**

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro $\boldsymbol{m}$. (1'25 puntos)

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que discutiremos comparando el rango de la matriz de los coeficientes M con el de la matriz ampliada con los coeficientes M^*:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{pmatrix}, \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 1-2m & -1 & m \end{pmatrix}$$

Evaluamos el rango de la matriz M en función del parámetro m:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{vmatrix} = -1 - m \cdot (1-2m) = -1 - m + 2m^2$$

$$\text{Si } |M| = 2m^2 - m - 1 = 0 \longrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \longrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Analizamos cada una de las posibilidades:

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1/2$:

$$|M| \neq 0 \longrightarrow ran(M) = ran(M^*) = 2 = n \text{ (número de incógnitas)}$$

$$\boxed{\forall\, m \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} \longrightarrow \text{Sistema compatible determinado}}$$

- Si $m = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow |M| = 0 \longrightarrow ran(M) = 1 \\ M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow ran(M^*) = 1 \end{array}\right\} ran(M) = ran(M^*) = 1 < n$$

$$\boxed{\text{Si } m = 1 \longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}}$$

- Si $m = -1/2$:

$$\left.\begin{array}{r} M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow |M| = 0 \longrightarrow ran(M) = 1 \\ M^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow ran(M^*) = 2 \end{array}\right\} ran(M) \neq rann(M^*)$$

$$\boxed{\text{Si } m = -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{Sistema incompatible}}$$

b) Resolver el sistema en los casos en que la solución no sea única. (0′75 puntos)

El sistema es compatible indeterminado para $m = 1$:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$$

Si hacemos $y = \lambda$, despejando en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos x en función de λ:

$$x + y = -1 \longrightarrow x + \lambda = -1 \longrightarrow x = -1 - \lambda$$

En consecuencia, las soluciones son:

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}}$$

c) Calcular los valores de m para que $x = -3$, $y = 2$ sea solución. (0′5 puntos)

Si las soluciones son $x = -3$, $y = 2$:

$$\begin{cases} -3 + 2m = -1 \\ -3 \cdot (1 - 2m) - 2 = m \end{cases}$$

De cualquiera de las ecuaciones puede obtenerse el valor de m:

$$-3 + 2m = -1 \longrightarrow 2m = -1 + 3 = 2 \longrightarrow \boxed{m = 1}$$

Ejercicio B2

a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 2$? (1 punto)

El producto escalar de dos vectores arroja un número que puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Siendo α el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Teniendo en cuenta los valores proporcionados:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 \cdot \cos\alpha = -3 \longrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{2} = -1'5$$

El coseno de un ángulo es un número comprendido entre -1 y 1, pero no puede ser nunca $-1'5$, por lo que <u>no es posible encontrar dos vectores que reúnan las condiciones pedidas</u>.

b) Hallar el valor de a para que exista una recta que pase por el punto $P = (1 + a, 1 - a, a)$, corte a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ y sea paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. (1′5 puntos)

La recta buscada, que llamaremos t, es paralela a la recta s, por lo que comparten vector director. Este vector puede determinarse mediante el producto vectorial de los dos vectores normales de los planos que definen la recta s:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k} \longrightarrow \vec{v} = (-1, 0, 1)$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com

Así, la recta t que tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ y pasa por el punto $P = (1 + a, 1 - a, a)$ tiene como ecuación:

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + a - \lambda \\ y = 1 - a \\ z = a + \lambda \end{cases}$$

Por otra parte, sabemos que la recta t corta a la recta r, la cual expresamos en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 - \mu \\ z = 1 \end{cases}$$

Así, igualando las respectivas coordenadas se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 + a - \lambda = \mu \\ 1 - a = 2 - \mu \\ a + \lambda = 1 \end{cases}$$

Despejando μ en las dos primeras e igualándolas:

$$1 + a - \lambda = 1 + a \longrightarrow \lambda = 0$$

De la tercera ecuación obtenemos que $\lambda = 1 - a$. Sustituyendo en la anterior igualdad:

$$1 - a = 0 \longrightarrow \boxed{a = 1}$$

Y la recta t queda:

$$t \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Ejercicio B3

Dada la función $f(x) = x/\ln x$, determinar su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. (2'5 puntos)

La función $\ln x$ exige que $x > 0$, y el hecho de que esta aparezca en el denominador, obliga a que $\ln x \neq 0$, algo que ocurre cuando $x = 1$, por lo que el dominio de la función resulta:

$$Dom\ f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

En $x = 1$ hay una asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal ni asíntota oblicua:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{\text{L´Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \longrightarrow \text{No hay A. H.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x/\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \longrightarrow \text{No hay A. O.}$$

Estudiamos la primera derivada para determinar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

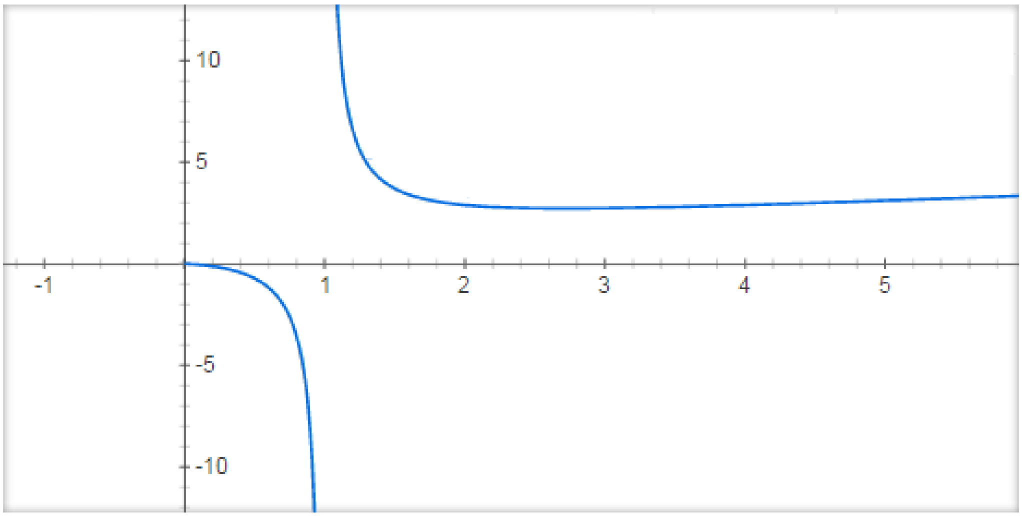
$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow \ln x - 1 = 0 \longrightarrow \ln x = 1 \longrightarrow x = e$$

— En el intervalo $(0, e) \longrightarrow f'(x) < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

— En el intervalo $(e, +\infty) \longrightarrow f'(x) > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

— Cuando $x = e \longrightarrow f(e) = e \longrightarrow$ Mínimo en el punto (e, e).



Ejercicio B4

a) Calcular: (1 punto)

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\ln(1+x) - x}{x \cdot \ln(1+x)} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\ln(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x}} \right]$$

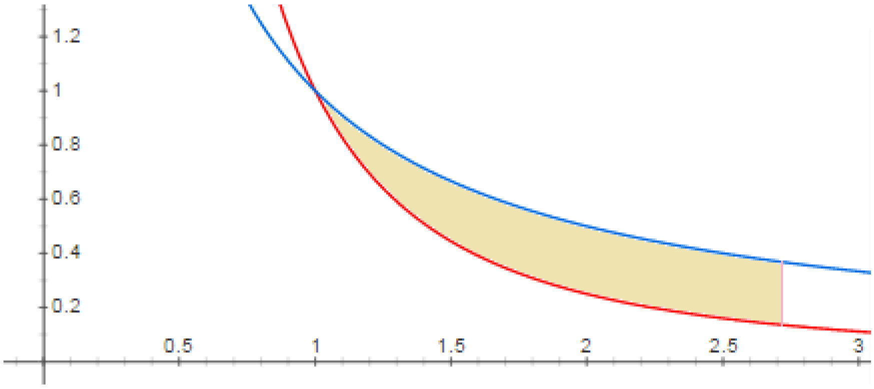
$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\frac{1 - 1 - x}{1+x}}{\frac{(1+x) \cdot \ln(1+x) + x}{1+x}} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{-x}{(1+x) \cdot \ln(1+x) + x} \right] = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{-1}{\ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} + 1} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{-1}{\ln(1+x) + 1 + 1} \right] = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Enrique Castaños García
enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Calcular el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$ y la recta $x = e$. (1'5 puntos)

Las gráficas de estas funciones son bien conocidas:



En ambos casos se trata de sendas hipérbolas que nunca cortan a los ejes y que tienen un punto de intersección entre ellas en $x = 1$.

De modo que el área encerrada por las curvas entre el punto de intersección y la recta $x = e$ es igual a:

$$A = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot dx - \int_1^e \frac{1}{x^2} \cdot dx = [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e = (\ln e - \ln 1) - \left(\frac{-1}{e} - \frac{-1}{1}\right)$$

$$= 1 - 0 + \frac{1}{e} - 1 = \boxed{\frac{1}{e}\ \mathrm{u}^2}$$

ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA
enrique.castanos.garcia@gmail.com